



ТЕПЛОТДАЧА  
В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ  
ЖИДКОСТИ

АКАДЕМИЯ НАУК ЛИТОВСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
ПРОБЛЕМ ЭНЕРГЕТИКИ

## ТЕПЛОФИЗИКА 2

LIETUVOS TSR MOKSLŲ AKADEMIJA  
FIZIKINIŲ-TECHNINIŲ ENERGETIKOS  
PROBLEMŲ INSTITUTAS

## ŠILUMINĖ FIZIKA 2

ACADEMY OF SCIENCES OF THE LITHUANIAN SSR  
INSTITUTE OF PHYSICAL AND TECHNICAL  
PROBLEMS OF ENERGETICS

## THERMOPHYSICS 2



A. ŽUKAUSKAS  
J. ŽIUGŽDA

ŠILUMOS ATIDAVIMAS  
LAMINARINIAME  
SKYSČIO SRAUTE

Redaktorius prof. A. ŽUKAUSKAS

LEIDYKLA „MINTIS“ ◆ VILNIUS — 1969

A. ŽUKAUSKAS  
J. ŽIUGŽDA

HEAT TRANSFER  
IN LAMINAR  
FLOW OF FLUID

Editor prof. A. ŽUKAUSKAS

„MINTIS“ ◆ VILNIUS — 1969

**А. ЖУКАУСКАС**

**И. ЖЮГЖДА**

**Т Е П Л О Т Д А Ч А  
В Л А М И Н А Р Н О М  
П О Т О К Е Ж И Д К О С Т И**

Под редакцией проф. А. ЖУКАУСКАСА



---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИНТИС» ВИЛЬНЮС — 1969

**6П2. 2**  
**Ж 85**

2—3—5

**Užsak. — 1969**

## Предисловие

Настоящее издание является второй книгой, посвященной исследованиям в области теплофизики, выполненным в Институте физико-технических проблем энергетики Академии наук Литовской ССР.

В течение ряда лет в Институте изучается широкий круг вопросов конвективного теплообмена, связанных с развитием новых областей энергетики и созданием различных теплообменных аппаратов. При проведении этих исследований приходилось сталкиваться с различными вопросами теплоотдачи при ламинарном обтекании поверхности тел вязкой жидкостью. Весь материал по изученным в Институте отдельным вопросам ламинарного теплообмена собран в настоящей книге в единое целое и систематизирован на основе единой методики. В некоторой степени освещаются также и более важные работы других авторов, касающиеся рассматриваемых вопросов.

В начале книги дается краткий обзор литературы по затрагиваемым в книге проблемам.

Во второй главе представлены различные аналитические решения обтекания пластины потоком вязкой жидкости.

Более подробно рассматривается решение уравнений движения при обтекании пластины ламинарным потоком несжимаемой жидкости, выполненное в Институте путем применения экспоненциальных рядов.

Глава третья посвящена аналитическим решениям отдельных задач теплоотдачи пластины при обтекании ламинарным пограничным слоем. Основное внимание сосредоточено на изучении влияния изменения физических параметров жидкости и неизотермичности поверхности на теплоотдачу пластины.

В главах четвертой и пятой представлено теоретическое решение вопросов теплообмена и гидравлического сопротивления в плоском канале. Часть, касающуюся исследований рассматриваемых вопросов при установившемся течении, подготовил научный сотрудник Н. Лютикас.

Шестая глава посвящена вопросам методики экспериментального исследования.

В седьмой главе освещаются проведенные авторами экспериментальные исследования теплоотдачи пластины в потоке вязких жидкостей при ламинарном пограничном слое. Значительная часть главы посвящена рассмотрению

экспериментальных исследований влияния изменения температуры поверхности и физических свойств жидкости на интенсивность теплоотдачи пластины.

Восьмая глава посвящена экспериментальному исследованию теплообмена и гидравлического сопротивления плоского канала.

В девятой главе приводятся выводы и практические рекомендации по расчету теплоотдачи и гидравлического сопротивления.

В приложениях представлена некоторая часть полученных данных. В виде таблиц приведены и наиболее характерные данные теоретических расчетов.

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам, принимавшим участие в проведении соответствующих исследований, а также всем, оказавшим помощь при подготовке настоящей книги к изданию.

**Авторы**

## Перечень основных обозначений

$a$	– коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{ч}$ ,
$A_k(x)$	– коэффициент в экспоненциальном ряду, уравнение (2.51),
$B_k(x)$	– коэффициент в степенном ряду, уравнение (2.54),
$c_p$	– теплоемкость жидкости, $\text{дж}/\text{кг град}$ ,
$c_f$	– коэффициент сопротивления трения,
$c_k(x)$	– коэффициент в степенном ряду, уравнение (3.159),
$D_k(x)$	– коэффициент в степенном ряду, уравнение (3.149),
$d_k(x)$	– коэффициент в степенном ряду, уравнение (3.159),
$d$	– эквивалентный диаметр, $\text{м}$ ,
$F$	– поверхность, $\text{м}^2$ ,
$f$	– коэффициент сопротивления канала,
$h$	– высота канала, $\text{м}$ ,
$K$	– соответствующий комплекс критериев подобия,
$K_2$	– параметр, $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$ ,
$l$	– длина пластины или канала, $\text{м}$ ,
$L$	– длина начального гидродинамического участка, $\text{м}$ ,
$L_T$	– длина начального термического участка, $\text{м}$ ,
$m$	– показатель степени при числе $Re$ ,
$m_1$	– показатель степени в уравнении (2.33),
$n$	– показатель степени при числе $Pr$ ,
$n_1$	– показатель степени в уравнении (3.49),
$p$	– давление, $\text{н}/\text{м}^2$ ,
$\Delta p$	– перепад давления, $\text{н}/\text{м}^2$ ,
$\overline{R}_k$	– коэффициент, уравнение (3.146),
$\overline{Q}$	– безразмерный тепловой поток,
$q$	– удельный тепловой поток, $\text{вт}/\text{м}^2$ ,
$s$	– половина высоты канала, $\text{м}$ ,
$s_1$	– ширина канала, $\text{м}$ ,



- $T, t$  — температура, град,  
 $\Delta t$  — температурный напор, °С,  
 $U$  — скорость невозмущенного потенциального потока; средняя скорость жидкости в плоском канале, отнесенная к единице ширины канала, м/сек,  
 $\bar{U}$  — безразмерная скорость в плоском канале,  $u/U$ ,  
 $U_0$  — скорость на внешней границе пограничного слоя; скорость течения на оси канала, м/сек,  
 $\bar{U}_0$  — безразмерная скорость на оси канала в уравнении (5.87),  
 $u$  — продольная составляющая скорости, м/сек,  
 $v$  — поперечная составляющая скорости, м/сек,  
 $x$  — координата вдоль стенки, м,  
 $x_0, l_0$  — длина начального необогреваемого участка пластины, м,  
 $x_1, l_1$  — обогреваемая длина пластины, м,  
 $X$  — параметр, характерный для начального гидродинамического участка,  $x/h Re_h, x/s Re_s$ ,  
 $\bar{X}$  — безразмерная продольная координата,  $x/h Pe$ ,  
 $X_0$  — безразмерная продольная координата,  $x/h$ ,  
 $y$  — координата, перпендикулярная стенке, м,  
 $Y$  — безразмерная поперечная координата,  $y/s_1$ ,  
 $Y_0$  — безразмерная поперечная координата,  $y/h$ ,  
 $z$  — безразмерная переменная,  
 $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $вт/м^2 град$ ,  
 $\beta$  — угол раствора клиновидного тела, параметр градиентного обтекания,  $\frac{2m_1}{m_1 + 1}$ ,  
 $\Gamma$  — гамма-функция,  
 $\delta$  — толщина гидродинамического пограничного слоя, м,  
 $\delta_T$  — толщина теплового пограничного слоя, м,  
 $\Delta$  — безразмерная толщина теплового пограничного слоя,  
 $\kappa$  — безразмерные температурные функции в уравнении (3.115),  
 $\zeta$  — безразмерная температура в уравнении (3.123),  
 $\eta, \eta_1$  — безразмерные переменные,  $\frac{y}{2} \left( \frac{U_p}{\mu x} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\sqrt{2-\beta}} \cdot \eta$ ,  
 $\Theta$  — безразмерная температура,  $\frac{T-T_f}{T_w-T_f}, \frac{T-T_w}{T_f-T_w}$ ,  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $вт/м град$ ,

- $\mu$  — динамическая вязкость,  $n \text{ сек}/m^2$ ,  
 $\nu$  — кинематическая вязкость,  $m^2/\text{сек}$ ,  
 $\frac{\delta_T}{\delta}$  — соотношение толщин пограничных слоев,  $\delta_T/\delta$ ,  
 $Y/\Delta$  — безразмерная координата,  $Y/\Delta$ ,  
 $\rho$  — плотность,  $кг/m^3$ ,  
 $\tau$  — касательное напряжение,  $n/m^2$ ,  
 $\varphi_k(x)$  — коэффициент в экспоненциальном ряду в уравнении (2.51),  
 $\Phi$  — функция в уравнениях (2.16), (2.38),  
 $\psi$  — функция тока в уравнениях (2.8), (2.10), (2.36),  
 $\gamma$  — коэффициент, учитывающий влияние продольной неизотермичности поверхности,  
 $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$  — критерий Нуссельта,  
 $Re = \frac{Ul}{\nu}$  — критерий Рейнольдса,  
 $Pr = \frac{\nu}{a}$  — критерий Прандтля,  
 $Pe = Re Pr$  — критерий Пекле,  
 $Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$  — критерий Эйлера.

## Индексы:

- $f$  — величина, относящаяся к невозмущенному потоку,  
 $w$  — величина, относящаяся к стенке,  
 $m$  — среднее значение величины,  
 $x$  — местные условия,  
 $h, d, x_1, \dots$  — определяющие размеры в критериях подобия.



# 1 Введение

Плоская продольно обтекаемая ламинарным потоком пластина является одним из наиболее широко распространенных элементов поверхностей современных теплообменных аппаратов и устройств. Даже начальный участок такого элемента, как труба, можно рассматривать как пластину. Поэтому знание закономерностей протекания процессов теплообмена на пластине с точки зрения современной практики и теории теплообмена остается весьма актуальным. Нередко при разработке точных и приближенных аналитических методов расчета различных проблем теплообмена с целью первой их проверки обращаются к обтеканию плоской пластины. Таким образом, например, проверяются различные задачи градиентного обтекания, диффузионный перенос и т. д. Это еще раз подтверждает важность точного знания закономерностей теплообмена пластины.

Строгая модель ламинарного течения позволяет изыскивать различные теоретические методы решения как гидродинамической задачи, так и задачи теплообмена плоской поверхности. Все имеющиеся теоретические исследования основываются на дифференциальных уравнениях пограничного слоя (уравнениях движения, неразрывности и энергии) или же на интегральных соотношениях, представляющих собой значительно упрощенные варианты уравнений Навье—Стокса.

Теплообмен пластины при продольном обтекании определяется как точными, так и приближенными методами. Точные методы основываются на дифференциальных уравнениях теплового пограничного слоя. В основе приближенных методов лежат интегральные соотношения динамического и теплового пограничных слоев, т. е. уравнения импульса и уравнения теплового потока. В области точных решений уравнений теплового пограничного слоя общеизвестна работа Е. Польгаузена [1].

В процессе данного решения получено распределение температуры в тепловом пограничном слое, которое позволило определить местную теплоотдачу на поверхности пластины. Таким образом, при постоянных физических параметрах и граничном условии  $T_w = \text{const}$  для местной и средней теплоотдачи пластины получены следующие критериальные уравнения:

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{0,33}, \quad (1.1)$$

$$Nu = 0,644 Re^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (1.2)$$

Данный метод интегрирования уравнений пограничного слоя весьма сложен и трудоемок. Поэтому часто при решении задач по теплообмену, а также и гидродинамических задач используются интегральное уравнение импульса [2], записанное для пограничного слоя конечной толщины и решенное

К. Польгаузен [3], и уравнение теплового потока, решенное Г. Н. Кружилиным [4]. При совместном решении этих уравнений необходимо принять распределения скоростей и температур в пограничном слое.

Для выражения законов распределения скорости и температуры в пограничных слоях применяют полиномы различной степени.

Распределение скоростей и температур чаще всего выражается полиномами от одного параметра:  $\frac{y}{\delta}$  и  $\frac{y}{\delta_T}$  соответственно. Г. Н. Кружилин, например, для выражения распределения скоростей и температур использовал полиномы различных степеней. Другие исследователи [5–7] применяли полиномы одинаковых степеней. В исследовании [8] использованы синусоидальные законы распределения скоростей и температур. Результаты приближенных решений на несколько процентов отличаются от результатов (1.1), (1.2) точного решения. Необходимо отметить, что точность результатов в основном зависит от соответствия принятых распределений скоростей и температур в пограничных слоях действительным. Решение гидродинамической задачи, выполненное С. Оя [9], показывает, что увеличением порядка полинома не удастся повысить точность решения, т. е. нет принципиальной возможности улучшить метод К. Польгаузена. В исследованиях [10, 11] вместо произвольно выбранных однопараметрических полиномов для выражения распределения скоростей и температур использованы профили, полученные при точных решениях уравнений пограничного слоя. Все, как точные, так и приближенные решения охватывают небольшой интервал изменения физических свойств теплоносителей, определяемых числом *Pr*. В исследованиях [12, 13] этот интервал значительно расширен как в сторону низких, так и в сторону высоких чисел *Pr*. Последняя работа является дальнейшим усовершенствованием метода Е. Польгаузена [1].

В упомянутых исследованиях все физические свойства приняты постоянными, что является весьма грубым приближением для вязких потоков жидкостей. Температурная зависимость физических свойств жидкостей вызывает взаимодействие пограничных слоев, которое в свою очередь влияет на теплообмен пластины.

Теплообмен пластины при переменных физических свойствах жидкости, несмотря на некоторые трудности, может быть определен аналитически. Т. Хара [14] путем совместного решения уравнений движения и энергии точным интегрированием при заданных степенных температурных зависимостях вязкости и теплопроводности определил теплоотдачу пластины в потоке воды.

В результате дальнейшего исследования решения [14] и обработки некоторых результатов в работе [15] для теплоотдачи пластины получена зависимость обобщенного вида, в которой влияние температурного напора и направления теплового потока учитывается согласно работам [16, 24].

С. М. Тарг [17] с помощью приближенного метода решения определил

влияние изменения физических свойств на теплообмен, дал физическую картину динамики пограничных слоев и коэффициента теплообмена.

В работе [18] путем применения приближенного интегрального метода установлено, что влияние переменной физических свойств на теплообмен должно учитываться функцией двух переменных  $f(\nu_f/\nu_w, Pr_w)$ . Существуют и другие интегральные методы решения этой задачи [19, 20].

Интегрально-итерационным методом с помощью уравнений пограничного слоя при использовании результатов точных решений Е. Польгаузена и Г. Блазиуса в качестве первого приближения Г. Шу [21] представил решение, в котором для случая переменной вязкости получено распределение скорости и температуры в пограничном слое при нагревании и охлаждении жидкости.

Следует полагать, что при обобщении влияния температурного напора и направления теплового потока необходима какая-то универсальная определяющая температура, позволяющая вести учет влияния изменения физических свойств жидкости на теплообмен. В работе [22] на основе анализа результатов исследования [21] за определяющую температуру рекомендуется принять температуру стенки  $t_w$ . В работе [23] за определяющую принимается средняя температура пограничного слоя.

М. А. Михеев [24] на основе своих экспериментов и обработки результатов разных авторов по исследованию теплообмена в трубах пришел к выводу, что влияние температурного напора и направления теплового потока на теплоотдачу лучше всего учитывать параметром  $[Pr_f/Pr_w]^{0,25}$ , принимая при этом температуру потока за определяющую.

Из приведенного краткого анализа видно, что учет влияния температурного напора и направления теплового потока в случае переменных физических свойств жидкости на теплообмен ведется по двум направлениям: а) путем подбора соответствующей определяющей температуры и б) введением дополнительного параметра с подбором определяющей температуры.

В связи с этим необходимо было провести теоретические и экспериментальные исследования в потоках жидкостей, которые позволили бы дать оценку этому важному вопросу, так как неправильный учет влияния температурного напора и направления теплового потока может повлечь за собой значительные ошибки в определении коэффициента теплоотдачи.

Теплообмен при неизотермической поверхности. В современной практике многие теплообменные поверхности отличаются градиентом температуры, существующим по длине вдоль потока, т. е. они обладают продольной неизотермичностью. Неизотермичность поверхности выражается различными законами изменения температуры: степенным, ступенчатым, линейным, а зачастую носит произвольный характер. Все виды продольной неизотермичности поверхности оказывают существенное влияние на теплообмен, и на практике это необходимо учитывать.

Процессы теплообмена, протекающие на неизотермической поверхности, могут быть изучены путем точного решения уравнений пограничного слоя с



учетом заданного закона неизотермичности или заданного продольного градиента температуры поверхности.

Существует ряд точных и приближенных асимптотических методов решения [25–31] теплообмена неизотермической пластины. Все они дают приблизительно равные результаты, указывая на более интенсивный процесс теплообмена в случае положительного продольного градиента температуры поверхности и менее интенсивный – в случае отрицательного градиента. В частности, влияние неизотермичности поверхности на теплообмен в отличие от теплообмена изотермической поверхности учитывается коэффициентом, выражаемым соотношением теплообмена пластины с переменной и постоянной температурой поверхности [27].

На практике очень часто встречается ступенчатая неизотермичность или один из ее видов – начальный необогреваемый участок. В этом случае формирование и развитие динамического и теплового пограничных слоев протекает неодновременно. В результате их взаимодействия наблюдается существенное влияние этого участка на теплообмен [5, 32].

Теплообмен пластины при ступенчатой неизотермичности ее поверхности может быть определен посредством решения уравнений пограничного слоя с учетом экспоненциальных законов распределения скорости и температуры в нем [27].

В практических условиях изменение температурного напора вдоль теплообменной поверхности чаще всего носит произвольный характер. В таких случаях произвольная кривая изменения температуры поверхности может быть заменена ступенчатой кривой [5], и ввиду линейности уравнения энергии решение ее может быть представлено суммой изотермических ступеней. Если температура поверхности изменяется непрерывно, то температурная кривая может быть заменена суммой бесконечно малых скачков температуры на бесконечно малых участках поверхности. В этом случае тепловой поток выражается в интегральном виде. С помощью такого метода можно определить тепловой поток на поверхности при любом виде неизотермичности, однако это требует большого объема вычислений. Э. Эккертом и др. [33] была предложена очень простая эмпирическая зависимость для определения как среднего, так и местного теплообмена.

Кроме приближенных методов определения теплообмена существует и ряд точных решений [34, 35]. В первом из этих исследований М. Лайтхилл использовал уравнение энергии, преобразованное по Р. Мизесу, приняв распределение скорости в пограничном слое за линейное, что существует только в пристеночной области. Распространение линейности скоростного профиля на всю область пограничного профиля вносит какую-то приближенность.

Д. А. Лабунцов [36] для исследования теплообмена неизотермической пластины предложил метод, основанный на решении уравнений пограничного слоя методом итерации при первоначально заданных распределениях скорости и температуры.

Теплообмен пластины является строго закономерным процессом переноса, который достаточно четко описывается дифференциальными уравнениями или интегральными соотношениями. Эти обстоятельства, по-видимому, позволили развить большое количество аналитических исследований. Однако все эти исследования включают в себя более или менее физически обоснованные допущения. Поэтому с целью доказательства их правильности или степени приближенности параллельно велись и экспериментальные исследования.

Исходя из требований практики, первые экспериментальные исследования были проведены в потоке воздуха при постоянной температуре стенки. Исследовались продольно обтекаемые пластины [37—39] и цилиндры [40]. Результаты этих экспериментов подтвердили зависимость (1.2), полученную ранее аналитически. Все исследования, как правило, были направлены на изучение средней теплоотдачи в потоке газа. В настоящее время мы уже располагаем результатами исследования [8], проведенного в потоке вязкой капельной жидкости. В указанной работе наряду с экспериментальным исследованием теплообмена продольно обтекаемой проволоки велось аналитическое решение задачи по взаимодействию скоростных температурных полей в пограничном слое. В данном исследовании охвачен небольшой интервал чисел  $Re$ . Поскольку диаметр проволоки небольшой ( $d=1-2,5$  мм), на процесс теплообмена может повлиять кривизна поверхности, так как величины  $r$  и  $\delta$  в соотношении  $\frac{r}{\delta}$  являются соразмерными.

Ввиду отсутствия экспериментальных исследований по теплообмену на плоской поверхности в широком интервале изменения физических свойств нельзя было определить влияние рода жидкости на теплообмен. Поэтому для расчета среднего теплообмена пластины М. А. Михеев [41], исходя из экспериментальных данных, полученных для входных участков круглых труб, вывел обобщенную эмпирическую формулу. В этой работе было предложено влияние рода жидкости и ее физических свойств на теплообмен определять критерием  $Pr$  в степени 0,43, что полностью совпадало с численным значением показателя степени для турбулентного пограничного слоя.

Экспериментальные исследования теплообмена плоской неизотермической продольно обтекаемой поверхности также немногочисленны и охватывают различные типы неизотермичности: степенной [29, 42, 43], ступенчатый [44—46], линейный [47].

Все указанные работы, за исключением [44], посвящены исследованию теплообмена в потоках воздуха, и только в последней работе рассматривается обтекание пластины потоком воды. В значительной части работ изучена только средняя теплоотдача. Такие работы подтверждают результаты теоретических решений с некоторой приближенностью. Поэтому полученные средние характеристики теплообмена не позволяют более глубоко проникнуть в сущность процессов, протекающих на поверхности пластины. Значительная часть

указанных исследований была направлена в основном на изучение турбулентной области, в силу чего были получены лишь ограниченные экспериментальные результаты по теплообмену при ламинарном пограничном слое.

Ввиду того, что теплообмен пластины тесно связан с гидродинамическими процессами ее обтекания, коротко остановимся на вопросах состояния теоретического и экспериментального исследования гидродинамической задачи. Впервые эта задача была решена Г. Блазиусом [48], который использовал с этой целью уравнения пограничного слоя Прандтля. Принятые граничные условия и введение функции тока позволили свести уравнения пограничного слоя в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого получено в виде совокупности степенного и асимптотического рядов. Численным методом это уравнение решил Л. Хоуарт [49]. Полученное решение недействительно для области, расположенной вблизи от передней кромки пластины. Для остальной области пластины этот метод является точным и позволяет определить все гидродинамические характеристики обтекания пластины. Результаты решения подтверждены также и экспериментальными исследованиями [50, 51].

К числу точных методов решения относится однопараметрический метод В. Фокнера, С. Скен [52] и Д. Хартри [53], предложенный для расчета градиентного обтекания. Этот метод при определенных условиях ( $\beta=0$ ) может быть использован и для расчета обтекания пластины.

Наряду с точными методами решения существуют и приближенные методы, основывающиеся на различных интегральных условиях. Из них наиболее распространенными являются методы, основанные на интегральном уравнении импульсов для элемента пограничного слоя конечной толщины [3]. Использование интегральных методов требует принятия определенного закона распределения скорости в пограничном слое. Для этой цели используются полиномы различного порядка, показательные, тригонометрические функции и т. д. Интегральные методы позволяют кратчайшим путем получить приближенные результаты исследуемого решения, дающие подчас только качественную картину явления. При исследовании обтекания пластины очень большое значение имеет соответствие принятого профиля скорости действительному.

Среди приближенных методов широко известен метод последовательных „моментов“, предложенный Д. Г. Лойцянским [54], при применении которого интегральные уравнения получаются посредством умножения уравнения пограничного слоя на последовательные степени поперечной координаты  $y^k$  (где  $k=0, 1, 2, \dots$ ) и последующего интегрирования поперек пограничного слоя. Таким образом, получаем совокупность последовательных „моментов“, выражающихся системой интегральных уравнений. Уравнение „нулевого момента“, полученное при  $k=0$ , является уравнением импульсов, а уравнение при  $k=1$  — уравнением „первого момента“ и т. д.

С. М. Тарг [17] и М. Е. Швец [55], используя понятие конечной толщины, получили интегральные уравнения путем исключения поперечной составля-

ющей скорости из уравнения пограничного слоя с применением при этом уравнения непрерывности. Приведенные методы отличаются большим объемом вычислительных операций и точностью, характерной для приближенных решений.

Видное место при исследовании задач обтекания пластины нужно отвести точным решениям, основанным на полных уравнениях Навье—Стокса, с применением вычислительной техники.

Дальнейшее развитие точных решений полных уравнений Навье—Стокса целесообразно еще и потому, что классическая теория пограничного слоя не располагает данными о граничных условиях на внешней границе слоя. Вследствие этого потенциальное течение как бы формально присоединяется к пограничному слою, и, таким образом, внешнее граничное условие ставится на бесконечном расстоянии от обтекаемой поверхности. Устранить указанный недостаток возможно путем использования полных уравнений Навье—Стокса.

Аналитическому решению этой задачи посвящена часть настоящей работы.

Проведенный краткий обзор исследований показывает, что большинство экспериментальных работ выполнено в потоке воздуха и не способствует более глубокому раскрытию физических процессов теплообмена в жидкостях. Имеющийся теоретический и экспериментальный материал охватывает узкий интервал изменения физических свойств жидкостей и не позволяет в достаточной степени определить влияние рода жидкости на теплоотдачу пластины. Ввиду отсутствия единой функциональной зависимости физических параметров капельных жидкостей от температуры нельзя отыскать единый строгий способ учета их влияния на теплообмен. Этим обстоятельством, видимо, и обусловлены различия в предложенных методиках расчета. Поэтому не менее важным и требующим решения вопросом является определение метода учета влияния на теплообмен зависимости физических свойств жидкости от температуры.

Экспериментально мало изучено влияние неизотермичности поверхности и различных граничных условий на теплообмен. Совершенно отсутствуют исследования этого вопроса в потоках вязких жидкостей.

Для изучения вышеизложенных вопросов ламинарного теплообмена пластины нами проводился комплекс экспериментальных исследований [56—60] с использованием одинаковых экспериментальных установок и единой методики.

Исследовались влияние физических свойств, рода жидкости на теплообмен пластины, местный теплообмен при различных направлениях теплового потока в интервале чисел  $Re$  от 10 до  $10^6$  и  $Pr$  от 0,7 до 600. При исследованиях были использованы пластины различной длины и конструкции.

Полученный обширный экспериментальный материал дал возможность более глубоко изучить теплообмен пластины, проникнуть в механизм теплообмена.

Наряду с экспериментальными исследованиями проводились и аналитические решения полных уравнений Навье—Стокса применительно к плоской пластине [61, 62].

Ввиду существующей аналогии между процессами, протекающими на пластине и в начальном участке плоского канала, уместно обратить внимание на состояние исследования теплообмена и гидродинамики плоского канала. Гидродинамический процесс, протекающий в начальном участке канала, по сравнению с процессом на пластине является более сложным, и полная аналогия наблюдается только в непосредственной близости от входа. В более отдаленных сечениях канала, ввиду образования пограничных слоев на стенках, возникает градиент давления вдоль потока, который в основном и определяет особенности теплообмена и сопротивления.

Гидродинамика и теплообмен в начальном участке исследуются точными и приближенными методами пограничного слоя. В работах К. Стефана [63, 64] определен теплообмен при постоянных физических свойствах. Решение осуществлено путем использования функции тока, с помощью которой уравнения пограничного слоя были превращены в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система позволила получить распределение скоростей и температур в канале, а также определить гидравлическое сопротивление и средний теплообмен. Аналогичную задачу решили Т. Сато и С. Сугавара [65], используя интегральные уравнения для пограничного слоя. Они определили местный и средний теплообмен при постоянной температуре поверхности. В указанной работе проведено также и экспериментальное исследование в потоке воздуха при  $q_w = \text{const}$ . Экспериментальное исследование среднего теплообмена в потоке воздуха можно найти в работе [66]. Е. Сперроу [67] определил гидродинамические характеристики и средний теплообмен посредством интегральных соотношений, а работы [68, 69] посвящены определению развития скоростного поля вдоль канала, т. е. решению только гидродинамической задачи.

Во всех аналитических исследованиях приняты упрощающие допущения, а известный из литературы экспериментальный материал не дает исчерпывающей картины теплоотдачи в плоском канале.

Нами выполнено обширное экспериментальное исследование [70, 71], в котором охвачены местный, средний теплообмен и гидравлическое сопротивление. Исследования проведены в потоках воздуха, воды, трансформаторного масла с использованием каналов различной геометрии. Исследован механизм теплообмена и получены расчетные зависимости, удобные для практического применения.

В современных и особенно в компактных теплообменных аппаратах очень часто используются плоские каналы, в которых процесс теплообмена протекает при гидродинамически установившемся течении. Исследование таких течений с точки зрения гидродинамики и теплообмена является очень актуальным, особенно при изменяющихся с температурой физических свойств

вах жидкостей. Большинство имеющихся работ посвящено исследованию теплообмена при постоянных физических свойствах [72, 73]. Наряду с ними появились работы Б. С. Петухова [74, 75], К. Янга [76], Х. Хаузенблаза [77], исследования в которых проведены с учетом изменчивости физических свойств. В работе [75] учтено влияние всех физических свойств на теплообмен. В других исследованиях чаще всего учитывается лишь влияние вязкости, так как ее действие значительно интенсивнее по сравнению с другими свойствами. При определении теплообмена это допущение может привести к некоторым неточностям. Для учета влияния изменения физических свойств, как и для случая пластины, нет единого метода. Имеющиеся теоретические исследования учитывают не все граничные условия, мало изучено сопротивление при неизотермическом течении. Экспериментальные исследования не охватывают всего круга вопросов теплообмена и гидравлического сопротивления, не достаточно изучено влияние геометрии плоского канала на теплообмен и сопротивление.

Знание комплекса вышеизложенных вопросов важно для практики и дальнейших исследований. Поэтому в Институте при выполнении исследований по ламинарному теплообмену также были затронуты отдельные вопросы теплообмена в плоском канале.

В данной работе мы не касаемся теплообмена и сопротивления при ламинарном течении жидкости в круглых трубах, поскольку эти вопросы достаточно полно изложены в недавно появившемся труде Б. С. Петухова [78].

Здесь приводится обобщение проведенного нами теоретического интегрального расчета теплообмена плоского канала при  $T_w = \text{const}$  и  $q_w = \text{const}$  [79–81]. При постановке экспериментальных исследований нами преследовалась цель изучить теплообмен и гидравлическое сопротивление в широком интервале изменения физических свойств при различной геометрии канала в случае постоянного теплового потока на поверхности.



# 2 Теоретический расчет обтекания пластины потоком вязкой жидкости

В настоящей главе приводятся наиболее распространенные как точные, так и приближенные классические методы решения обтекания пластины и других клиновидных тел. Представлено решение распределения скоростных полей на пластине при постоянном расходе жидкости, выполненное посредством экспоненциальных рядов при использовании полных уравнений Навье—Стокса. Даны дифференциальные уравнения и интегральные соотношения, описывающие рассматриваемые процессы. Ввиду того, что в последующих главах системы этих уравнений будут использованы при решении задач теплообмена и гидродинамики плоского канала и пластины при постоянных и переменных физических свойствах жидкостей, они приводятся в общем виде.

## 2. 1. Уравнения движения жидкости в пограничном слое

Плоское стационарное движение несжимаемой жидкости при отсутствии действия массовых сил и при переменных физических свойствах можно выразить уравнениями Навье—Стокса:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0. \quad (2.3)$$

При обтекании тела (рис. 1) реальной жидкостью на его поверхности вследствие действия сил вязкости образуется область, именуемая пограничным слоем. За пределами этой области течение практически происходит без трения, т. е. оно подчиняется законам идеальной жидкости. Нас в основном интересует пограничный слой.

Систему уравнений (2.1)–(2.3) для пограничного слоя можно значительно упростить. Уравнением (2.2) можно пренебречь, поскольку силы, действующие в нормальном направлении обтекаемой поверхности, значительно меньше сил, действующих в касательном направлении. Тогда стационарный плоский пограничный слой может быть представлен уравнением движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.1a)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0. \quad (2.3)$$

Движение жидкости в пограничном слое с учетом влияния градиента давления при  $\rho = \text{const}$  может быть выражено уравнением импульса для элемента данного слоя

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (U-u) u dy + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (U-u) dy = \tau_w. \quad (2.4)$$

Вывод представленных уравнений в данной работе не приводится, так как это можно найти в ряде работ по общему курсу гидродинамики [17, 54, 68].

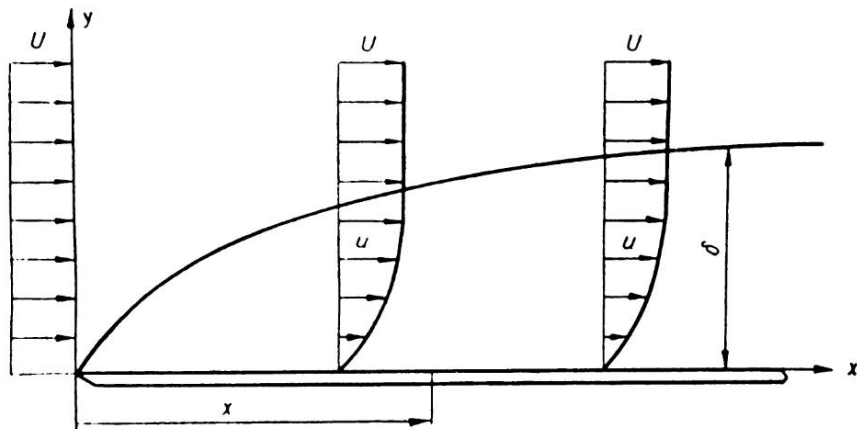


Рис. 1. Гидродинамический пограничный слой на пластине

## 2.2. Расчет динамического пограничного слоя на пластине

**1. Точные методы решения.** Обтекание пластины является безградиентным процессом, вследствие чего  $\partial p / \partial x = 0$ . Тогда задачу обтекания пластины на основе системы уравнений (2.1а), (2.3) в случае отсутствия температурных полей при постоянных физических свойствах потока жидкости можно решить посредством следующей системы уравнений динамического пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.6)$$

При решении данной задачи принимаются следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=v=0, \\ \text{при } y=\infty \quad u=U. \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

и, согласно [48], вводится функция тока  $\psi$ , выражаемая соотношениями

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Вводятся также новая безразмерная переменная

$$\eta = \frac{y}{2} \left( \frac{U\rho}{\mu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

и функция тока, определяемая зависимостью

$$\psi = \left( \frac{\mu U x}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi(\eta). \quad (2.10)$$

Используя зависимости (2.9) и (2.10), можем определить все необходимые члены уравнения (2.5):

$$u = \frac{U}{2} \Phi'(\eta), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U\eta}{4x} \Phi'', \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{4} \left( \frac{U\rho}{\mu x} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi'', \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U\rho}{8\mu x} \Phi''', \quad (2.14)$$

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu U}{\rho x} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta \Phi' - \Phi). \quad (2.15)$$

Подставив зависимости (2.10)–(2.15) в уравнение (2.5) и выполнив некоторые операции, получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' = 0, \quad (2.16)$$

которое может быть проинтегрировано при следующих видоизмененных граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta = 0 \quad \Phi = 0, \quad \Phi' = 0, \\ \text{при } \eta = \infty \quad \Phi = 1, \quad \Phi' = 2. \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

При решении полученного уравнения возникают некоторые затруднения. Поэтому решение может быть получено либо разложением в степенной ряд по быстро возрастающим степеням в области малых значений  $\eta$  и асимптотическим продолжением при больших значениях  $\eta$ , либо численными методами.

В случае решения уравнения (2.16) по первому методу функция  $\Phi$  выражается рядом Тейлора:

$$\Phi = A_0 + A_1 \eta + A_2 \frac{\eta^2}{2!} + A_3 \frac{\eta^3}{3!} + \dots \quad (2.18)$$

Произведя дифференцирование по  $\eta$ , получаем:

$$\Phi' = A_1 + \frac{2A_2 \eta}{2!} + \frac{3A_3 \eta^2}{3!} + \dots \quad (2.19)$$

Используя граничные условия (2.17), уравнения (2.18), (2.19), в (2.16) все коэффициенты в рядах, выражаем через  $A_2$ :

$$\Phi = \frac{A_2 \eta^2}{2!} - \frac{A_2^2 \eta^5}{5!} + \frac{11A_2^3 \eta^8}{8!} - \frac{375A_2^4 \eta^{11}}{11!} + \dots \quad (2.20)$$

Применив асимптотические разложения при больших  $\eta$  в некоторой области, определяем коэффициент  $A_2$ .

Подставляя значение  $A_2 = 1,328$  в ряд (2.20) и используя уравнение (2.11), можем определить все необходимые гидродинамические характеристики обтекания пластины.

Л. Хоуарт [49] решил данную задачу посредством численного интегрирования уравнения (2.16). Результаты этого расчета представлены в табл. 1. По данной таблице можно определить распределение скоростей в пограничном слое  $u/U = f(\eta)$ , графическая интерпретация которого дана на рис. 2. Если принять, что толщина пограничного слоя равна расстоянию, где  $u = 0,99U$ , то, используя данные табл. 1, ее можно выразить уравнением:

$$\delta = 4,96 \sqrt{\frac{vx}{U}}. \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.21) следует, что пограничный слой с удалением от передней кромки пластины возрастает, подчиняясь закону  $\delta \equiv \sqrt{x}$ .

Таблица 1 Значения функций  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$ ,  $\frac{u}{U}$  для продольно обтекаемой пластины

$\eta$	$\Phi$	$\Phi'$	$\Phi''$	$\frac{u}{U}$
0	0	0	1,32824	0
0,2	0,0266	0,2655	1,3260	0,1328
0,4	0,1061	0,5294	1,3096	0,2647
0,6	0,2380	0,7876	1,2664	0,3938
0,8	0,4203	1,0336	1,1867	0,5108
1,0	0,6500	1,2596	1,0670	0,6298
1,2	0,9223	1,4580	0,9124	0,7290
1,4	1,2310	1,6230	0,7360	0,8115
1,6	1,5691	1,7522	0,5565	0,8761
1,8	1,9295	1,8466	0,3924	0,9233
2,0	2,3058	1,9110	0,2570	0,9555
2,2	2,6924	1,9518	0,1558	0,9759
2,4	3,0853	1,9756	0,0875	0,9878
2,6	3,4819	1,9885	0,0454	0,9943
2,8	3,8803	1,9950	0,0217	0,9915
3,0	4,2796	1,9980	0,0096	0,9990
3,2	4,6794	1,9992	0,0039	0,9996
3,4	5,0793	1,9998	0,0015	0,9999
3,6	5,4793	2,0000	0,0005	1,0000
3,8	5,8792	2,0000	0,0002	1,0000

К числу очень важных гидродинамических характеристик обтекания пластины относятся местное и среднее сопротивления трения на поверхности пластины. Указанные сопротивления трения можно определить путем использования данных табл. 1 и уравнения местного касательного напряжения на стенке:

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U}{4} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \Phi'(0). \quad (2.22)$$

В этом уравнении  $\Phi''(0) = 1,328$ . Тогда безразмерное касательное напряжение на стенке можно представить следующим выражением:

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}. \quad (2.23)$$

Из (2.23) видно, что сопротивление трения уменьшается по длине пластины, т.е.  $\tau_w(x) \propto x^{-\frac{1}{2}}$ . Такая пропорциональность между касательным напряже-

нием и продольной координатой обусловлена образованием и закономерностью развития пограничного слоя на стенке.

Для практики очень важно знать как местный, так и средний коэффициенты сопротивления, которые выражаются следующим образом:

$$c_{fx} = \frac{2\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}, \quad (2.24)$$

$$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}. \quad (2.25)$$

В процессе формирования обтекания пластины основную роль играет продольная составляющая скорости. Ею обусловлены все особенности те-

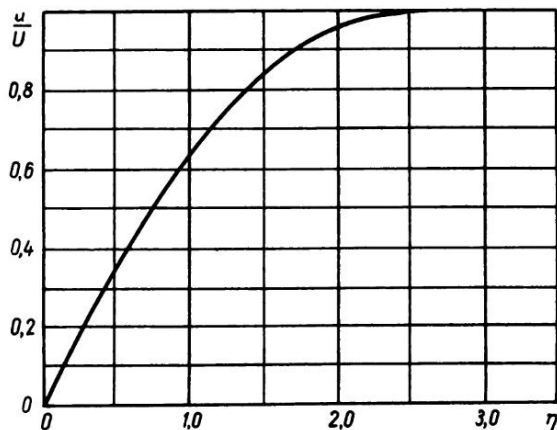


Рис. 2. Распределение скоростей в пограничном слое на пластине

чения в пограничном слое и взаимодействия пластины с потоком. Поперечная составляющая скорости  $v$  играет второстепенную роль, ее действие во много раз меньше продольной. Это ясно видно, если в системе координат  $\frac{v}{U} \sqrt{Re_x} = f(\eta)$  представить распределение скорости (рис. 3). Поперечная составляющая скорости (см. табл. 2) оказывает незначительное влияние на потен-

Таблица 2

Значения функции  $\frac{v}{U} \sqrt{Re} = f(\eta)$

$\eta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0
$\frac{v}{U} \sqrt{Re}$	0	0,00332	0,01328	0,0298	0,0528	0,0821	0,305
$\eta$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2
$\frac{v}{U} \sqrt{Re}$	0,571	0,758	0,837	0,857	0,860	0,860	0,860



циальное течение даже при больших расстояниях от поверхности пластины. Природа этой составляющей обусловлена образованием пограничного слоя на поверхности и постепенным уменьшением продольной составляющей скорости вдоль течения.

Здесь, на внешней границе, эффект поперечной составляющей скорости проявляется как обратное влияние пограничного слоя на потенциальный

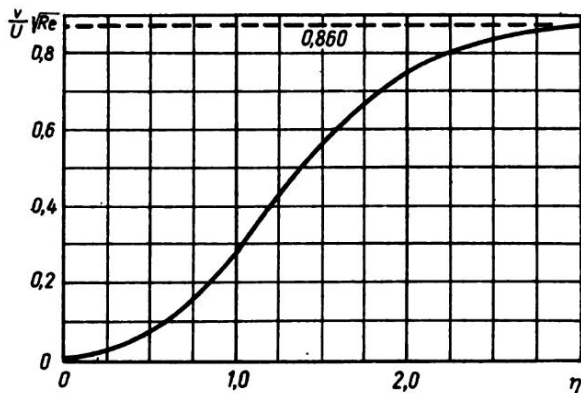


Рис. 3. Распределение поперечной составляющей скорости в пограничном слое на пластине

поток. В теории пограничного слоя это обстоятельство не принимается во внимание. Предполагается, что образование пограничного слоя не вызывает искажений продольной составляющей скорости потенциального потока, хотя и приводит к слабому поперечному течению в нем. Поперечная скорость  $v$  в классической постановке пограничного слоя не является граничным условием на внешней границе, так как там достаточно условия  $u \rightarrow U$  при  $y \rightarrow \infty$ . В случае постановки более общей задачи при использовании полных уравнений Навье—Стокса необходимо использовать скорость  $v$  как внешнее граничное условие. Решения при таких внешних граничных условиях будут приведены ниже.

Существующие другие точные методы решения уравнений пограничного слоя [52, 53] чаще всего сводятся к уравнению (2.16).

Рассмотренный метод решения уравнений пограничного слоя, выполненный Г. Блазиусом [48], сводится к определению расходящегося степенного ряда (2.20) для распределения скорости. Решение, выполненное в работе [82], основано на добавлении к уравнению членов (2.16), посредством которых получается точно интегрируемое уравнение в виде сходящегося ряда. Сходимость решения дает возможность использовать его в большем интервале чем решение Г. Блазиуса.

**2. Приближенные методы решения.** Математические трудности, с которыми неизбежно приходится сталкиваться в процессе непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений течения жидкости в пограничном

слое, побуждают к изысканию более простых, хотя и менее точных методов решения поставленной задачи. В существовании таких трудностей мы убедились и при решении уравнения (2.16). При решении задач гидродинамики употребляют приближенные методы, основывающиеся на интегральных соотношениях, которые обычно выводятся из уравнений пограничного слоя или из теоремы о количестве движения для элемента пограничного слоя конечной толщины.

В отличие от точных методов в приближенных методах распределения скорости в пограничном слое обычно принимаются как определенная его функция толщины. В этом случае толщина пограничного слоя является главной, подлежащей определению величиной, с помощью которой впоследствии точно определяются распределения скоростей и сопротивление трения.

Для расчета обтекания пластины ламинарным потоком нами будет использовано интегральное уравнение импульса (2.4) со следующими условиями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0, \\ \text{при } y = \delta \quad u = U, \quad \frac{du}{dy} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

Для выражения распределения скоростей в пограничном слое принимаем полином третьей степени, т. е. кубическую параболу:

$$u = ay + by^2 + cy^3. \quad (2.27)$$

Значения констант  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяются в процессе двукратного дифференцирования по  $y$  уравнения (2.27):

$$\frac{du}{dy} = a + 2by + 3cy^2,$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 2b + 6cy.$$

Принимая граничные условия (2.26), получаем:

$$b = 0, \quad a + 3c\delta^2 = 0, \quad u = a\delta + c\delta^3,$$

$$c = -\frac{1}{2} \frac{u}{\delta^3}, \quad a = \frac{3}{2} \frac{U}{\delta}.$$

Тогда распределение скоростей в пограничном слое будет выражаться зависимостью

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (2.28)$$

Используя данную зависимость в уравнении импульса (2.4), получим выражение изменения количества движения в пограничном слое:

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l (U-u) u dy &= \rho \int_0^l U \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{Uu}{U} dy = \\ &= \rho U^3 \int_0^{\delta} \left[1,5 \frac{y}{\delta} - 0,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \left[1 - 0,5 \frac{y}{\delta} + 1,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \frac{39}{280} \rho U^3 \delta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из уравнения (2.28) получаем градиент скорости на поверхности пластины:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{U}{\delta}.$$

Применение этого градиента позволяет определить касательное напряжение на стенке:

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta}. \quad (2.30)$$

Подставив в уравнение (2.4) выражения отдельных его членов (2.29) и (2.30), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{39}{280} \rho U^3 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta}. \quad (2.31)$$

Выполнив разделение переменных и проинтегрировав, получаем аналогичную (2.21) зависимость для определения толщины пограничного слоя:

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (2.32)$$

Сопоставление результатов, полученных точным (2.21) и приближенным (2.32) методами, дает хорошее совпадение, что указывает на удачный подбор распределения скоростей, соответствующего, по-видимому, существующему в пограничном слое.

### 2.3. Решение уравнений пограничного слоя при заданном распределении скорости $U_0 = cx^{m_1}$ на внешней границе

Степенное распределение скорости на внешней границе пограничного слоя выражается уравнением

$$U_0 = cx^{m_1}. \quad (2.33)$$

Как видно из уравнения (2.33), ввиду ускоряющегося или замедляющегося потока такое обтекание будет сопровождаться градиентом давления  $dp/dx$ . Только в случае  $m_1=0$  обтекание станет безградиентным, т. е. будет соответствовать обтеканию пластины. На рис. 4 представлены наиболее ха-

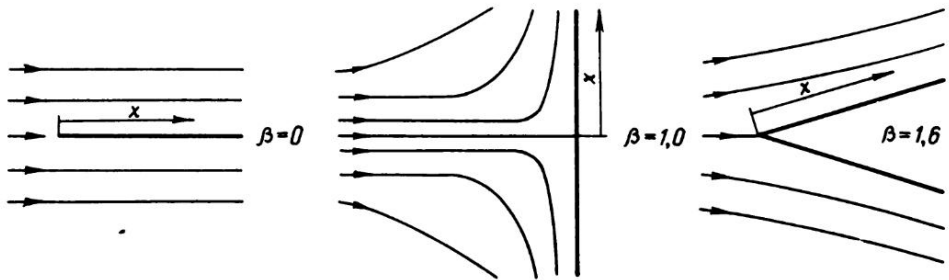


Рис. 4. Схема обтекания клиновидных тел

рактерные случаи обтекания клиновидных тел. Как видно из этого рисунка, при  $m=0$  и  $m=1$  обтекание клиньев аналогично продольному и поперечному обтеканию пластины. Необходимо отметить, что характерной величиной для клиновидных тел является угол раствора; соответственно показатель степени может выражаться через  $\beta$ :

$$m_1 = \beta / (2 - \beta).$$

Исследование обтекания клиновидных тел осуществляется с помощью уравнений пограничного слоя (2.1а) и (2.3), которые в случае постоянных физических свойств принимают следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2.35}$$

Аналогично как и при обтекании пластины вводятся функция тока и новая переменная:

$$\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{2-\beta}} \cdot \eta, \quad \psi_1 = \Phi(\eta_1) \sqrt{\frac{2}{m_1+1}} \nu x U_0, \tag{2.36}$$

а также принимаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta_1 = 0 & \quad \Phi = 0, \quad \Phi' = 0, \\ \text{при } \eta_1 = \infty & \quad \Phi' = 1. \end{aligned}$$

Введя функцию тока  $\psi$  (2.36) в уравнение неразрывности и проинтегрировав его, определяем составляющие скорости  $u$  и  $v$ . Выполнив подстановку этих скоростей в уравнение (2.34) и обозначив

$$\frac{2m_1}{m_1+1} = \beta, \quad (2.37)$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, впервые выведенное в работе [52]:

$$\Phi'' + \Phi' \Phi + \beta (1 - \Phi'^2) = 0. \quad (2.38)$$

Решение этого уравнения численными методами получил Д. Хартри [53]. Результаты решения для некоторых клиновидных тел ( $\beta=1,6; 1,0; 0$ ) представлены в табл. 3. Распределение скоростей показано на рис. 5.

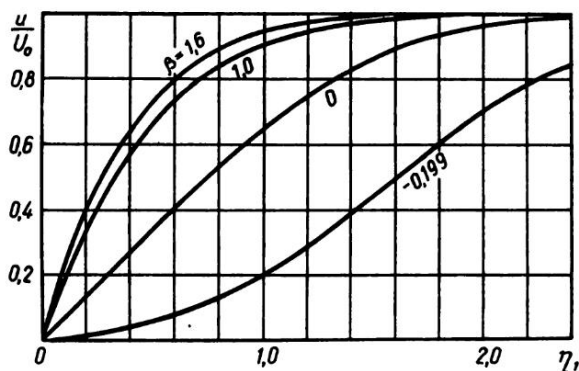


Рис. 5. Распределение скоростей в пограничном слое над поверхностью клиновидных тел

Используя уравнения (2.36), безразмерное распределение скоростей в пограничном слое и градиент скорости на стенке определяем следующими зависимостями:

$$\frac{u}{U_0} = \Phi', \quad (2.39)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\eta=0} = U_0 \sqrt{\frac{1+m_1}{2} \frac{U_0 \rho}{\mu x}} \Phi''(0). \quad (2.40)$$

Для расчета профиля скорости и ее градиента, а также сопротивления трения используются данные, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

Значения функций  $\Phi'$ ,  $\Phi''$

$\beta$	0	1,0	1,6
$\Phi''(0)$	0,469	1,232	1,521
$\eta$	$\Phi'$	$\Phi'$	$\Phi'$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,0939	0,2266	0,2726
0,4	0,1876	0,4144	0,4849
0,6	0,2806	0,5662	0,6446
0,8	0,3720	0,6859	0,7610
1,0	0,4606	0,7778	0,8432
1,2	0,5453	0,8467	0,8997
1,4	0,6244	0,8969	0,9375
1,6	0,6967	0,9324	0,9620
1,8	0,7610	0,9569	0,9775
2,0	0,8167	0,9732	0,9871
2,2	0,8633	0,9841	0,9928
2,4	0,9011	0,9905	0,9961
2,6	0,9306	0,9946	0,9980
2,8	0,9529	0,9971	0,9990
3,0	0,9691	0,9985	0,9995
3,2	0,9804	0,9992	0,9998
3,4	0,9880	0,9996	0,9999
3,6	0,9929	0,9998	
3,8	0,9959	0,9999	
4,0	0,9978		

#### 2.4. Определение скоростных полей на пластине при постоянном расходе жидкости

Решение полных уравнений Навье-Стокса даже для такого простого случая, как плоское обтекание пластины, до сих пор математически не сформулировано. В Институте П. Эйдукавичюсом и др. [61, 62] была предпринята попытка осуществить такое решение, которое дало бы возможность определить скоростные поля на пластине по всему сечению потока, включая пограничный слой и потенциальное течение.

Если принять, что процесс обтекания пластины будет происходить при отсутствии температурных полей, т. е. при постоянных физических свойствах, и ввести оператор Лапласа в правую часть уравнений (2.1) и (2.2), то система уравнений (2.1)–(2.3) примет новый вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \tag{2.41}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.43)$$

К этой системе присоединяются граничные условия:

$$u = v = 0, \quad y = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.44)$$

$$u = U, \quad y = \infty, \quad x \geq 0, \quad (2.45)$$

$$v = 0, \quad y = \infty, \quad x \geq 0. \quad (2.46)$$

Следует несколько остановиться на особенности принятых в данном случае граничных условий, т. е. обратить внимание на граничное условие (2.46), которое отсутствует в классической теории пограничного слоя. Это отсутствие обусловлено характером самих уравнений пограничного слоя в связи с исключением уравнения (2.42). Вышеприведенное граничное условие (2.46) означает постоянство расхода жидкости в течении при разных продольных координатах  $x$ , что можно выразить зависимостью

$$\int_0^{\infty} (U - u) dy = 0. \quad (2.47)$$

Рассматриваемое граничное условие при исследовании пластины упомянуто в работе [83], но оно не используется ввиду постановки задачи в свете классической теории пограничного слоя. В работе [85] дается критика нечеткости граничных условий. В частности, при  $y \rightarrow \infty$   $u = U$ ,  $U \neq \text{const}$ . Решение уравнений пограничного слоя приводит к парадоксальному результату, т. е. неограниченному возрастанию нормальной составляющей скорости  $v$  с удалением от поверхности пластины или другого тела. Полученный вывод противоречит реальной действительности, что также подтверждает ограниченность теории пограничного слоя.

В процессе дальнейшего решения, основываясь на системе дифференциальных уравнений и граничных условий (2.41) – (2.43), определяем распределения как продольной, так и поперечной составляющих скоростей в пограничном слое [61, 62].

Чтобы исключить неизвестную величину  $p$ , уравнение (2.41) дифференцируем по  $y$ , а уравнение (2.42) – по  $x$ . Выполнив вычитание (2.42) из (2.41), получим вместо системы уравнений одно дифференциальное уравнение:

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (2.48)$$

Решение полученной системы уравнений (2.43) и (2.48) не является частным решением исходной системы, поэтому она считается более общей. Для определения единственности решения вновь полученной системы к граничным усло-

виям (2.44)–(2.46) необходимо прибавить дополнительные граничные условия в виде уравнений:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = f_1(x), \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = f_2(x). \quad (2.50)$$

Решение системы уравнений (2.43) и (2.48) может быть представлено экспоненциальным рядом

$$\frac{u}{U} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) y^k \exp(-\varphi_k(x)y), \quad (2.51)$$

где коэффициенты  $A_k(x)$  и  $\varphi(x)$  – неизвестные функции. С помощью подстановки граничного условия (2.44) получаем  $A_0(x) = 1$ . Для вычисления других неизвестных функций ряд (2.51) преобразуется в двойной степенной

$$\frac{u}{U} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) y^k \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{[\varphi_k(x) \cdot y]^i}{i!}. \quad (2.52)$$

Выполнив приведение подобных членов, получим степенной ряд типа

$$\frac{u}{U} = (\varphi_0 - A_1)y - \left(\frac{\varphi_0^2}{2} - A_1\varphi_1 + A_2\right)y^2 \dots \quad (2.53)$$

После введения обозначений

$$B_k(x) = \sum_{n=0}^k (-1)^n A_n(x) \frac{[\varphi_n(x)]^{k-n}}{(k-n)!} \quad (2.54)$$

ряд (2.53) принимает такой вид:

$$\frac{u}{U} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_k(x) y^k, \quad (2.55)$$

что является решением системы уравнений (2.43) и (2.48).

Используя уравнение неразрывности (2.43) и граничные условия (2.44), с помощью коэффициентов  $B_k(x)$  определяем поперечную составляющую скорости  $v$ :

$$\frac{v}{U} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} B_k'(x) y^{k+1}. \quad (2.56)$$



Подставив соотношения (2.55) и (2.56) в уравнение (2.48) и уравнив коэффициенты при одинаковых степенях переменного  $u$  левой и правой частей уравнения, получаем рекуррентную систему уравнений для определения коэффициентов при  $k=1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{aligned}
 B_{k+2}(x) = & \frac{U}{v(k+1)(k+2)(k+3)} \left[ \sum_{i=4}^{k+1} \frac{1}{i+2} B'_{i+3} B''_{k-i+2} + \frac{1}{k+2} \frac{v}{U} B''_{k+1} + \right. \\
 & + \sum_{i=2}^{k+1} (k-i+2) B_{i-1} B'_{k-i+2} + \sum_{i=3}^{k+1} \frac{(k-i+2)(k-i+3)}{i-1} B'_{i-2} B_{k-i+3} - \\
 & \left. - \sum_{i=4}^{k+1} \frac{1}{k-i+3} B_{i-3} B''_{k-i+2} - 2(k+1) \frac{v}{U} B''_{k+1} - \frac{v}{kU} B''_{k-1} \right]. \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

В этой системе каждый коэффициент  $B_k(x)$  выражается коэффициентами  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$ . Для определения коэффициентов  $B_k(x)$  используются уравнения (2.49) и (2.50), из которых посредством (2.53) можно определить, что

$$B_1(x) = f_1(x), \quad (2.58)$$

$$B_2(x) = f_2(x). \quad (2.59)$$

Основываясь на известных результатах теоретических и экспериментальных решений обтекания пластины, граничные условия (2.49) и (2.50) с учетом (2.58) и (2.59) можно записать в следующем виде:

$$B_1(x) = f_1(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{U}{vx}}, \quad (2.60)$$

$$B_2(x) = f_2(x) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.61)$$

Система уравнений (2.57) позволяет только единственным образом определить коэффициенты  $B_k(x)$ . Из уравнения (2.54) видно, что каждому коэффициенту  $B_k(x)$  соответствуют коэффициенты  $A_k(x)$  и  $\varphi_k(x)$  ряда (2.51). Определить  $2k$  неизвестных коэффициентов можно только из  $k$  уравнений. Отсюда следует вывод, что ряд (2.51) определяется не самими коэффициентами  $A_k(x)$  и  $\varphi_k(x)$ , а составленными из них комплексами  $B_k(x)$  (2.54), внутри которых коэффициенты  $A_k(x)$  и  $\varphi_k(x)$  могут изменяться, не влияя при этом на величину ряда (2.51). Поэтому нужно так подобрать величину этих коэффициентов, чтобы была обеспечена сходимость ряда (2.48). На коэффициенты  $A_k(x)$

и  $\varphi_k(x)$  налагается условие, выражаемое уравнением (2.47), которое после совместного вычисления с (2.51) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\varphi_0} + \frac{A_1}{\varphi_1^2} + 2! \frac{A_2}{\varphi_2^3} + \dots + n! \frac{A_n}{\varphi_n^{n+1}} = 0. \quad (2.62)$$

Вычисление коэффициентов  $B_k(x)$  проводится с помощью уравнений (2.57), (2.60) и (2.61). Подставляя полученные значения в уравнение (2.54), получаем

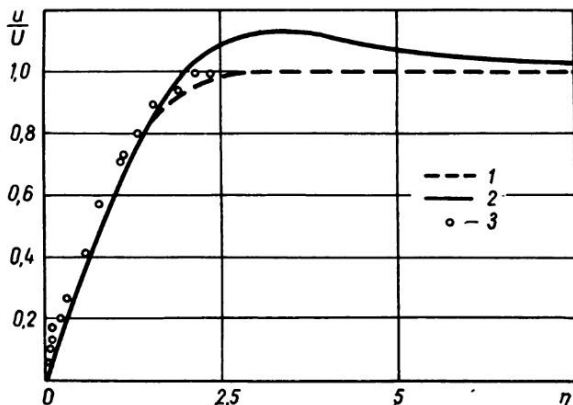


Рис. 6. Сопоставление различных данных распределения продольной скорости на пластине. 1 — по Блазиусу, 2 — по теоретическому решению настоящего исследования при постоянном расходе жидкости, 3 — опытные данные настоящего исследования (табл. 4)

систему уравнений для определения  $A_k(x)$  и  $\varphi_k(x)$ , а их окончательное определение осуществляется с помощью уравнения (2.62).

Используя изложенную методику расчета, можно определить профили скоростей продольной  $u$  и поперечной  $v$  составляющих. Значения составляющей  $v$  определяются из уравнения неразрывности (2.43) при применении известной скорости (2.51). Численные расчеты этих составляющих для конкретных случаев были выполнены на ЭВМ и представлены в виде графиков на рисунках 6, 7, в табл. 5 и в табл. 2 приложений.



Рис. 7. Распределение поперечной скорости на пластине при постоянном расходе жидкости

Таблица 4

Распределение скоростей в пограничном слое на пластине  
( $U=0,12$  м/сек,  $\nu=45 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек,  $x=0,988$  м)

$y$ , мм	0,5	1,5	2,5	6,0	10	30	50	70	90
$\eta$	0,013	0,040	0,065	0,155	0,310	0,780	1,300	1,825	2,350
$\frac{u}{U}$	0,08	0,09	0,10	0,18	0,25	0,56	0,80	0,95	1,00

Таблица 5

Значения  $\frac{v}{U} \sqrt{Re} = f(\eta)$  на пластине

$\eta$	0,7	0,85	1,1	1,5	2,1	3,9	5,3	7,5	8,5	10
$\frac{v}{U} \sqrt{Re}$	0,15	0,23	0,31	0,59	0,85	1,14	1,06	0,81	0,71	0,56

## 2.5. Обтекание пластины при малых числах $Re$

Процесс обтекания в таких условиях имеет место при малых скоростях, а также при непосредственной близости к передней кромке пластины или другого тела. Уравнения теории пограничного слоя не применимы к этой области, так как допущение  $\delta^2 u / \delta x^2 \ll \delta^2 u / \delta y^2$  здесь не действительно ввиду значительных продольных изменений трения. Таким образом, в какой-то области пластины ( $0 < x < x_{\text{мин}}$ ) классическая теория пограничного слоя не действительна. Особенности обтекания пластины в этой области могут быть отражены только с помощью полных уравнений Навье—Стокса [86]. В результате приближенной оценки [87] установлена нижняя граница числа  $Re_x$ , до которой применима классическая теория пограничного слоя. Если утверждать, что толщина пограничного слоя значительно меньше продольной координаты  $x$ , то приближенно можно принять, что

$$\delta^2 \ll x^2. \quad (2.63)$$

Если принять толщину пограничного слоя, полученную в точном решении (2.21), равной

$$\delta = 4,96 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad (2.64)$$

то из уравнения (2.63) получим значения для минимального числа  $Re_x \gg 25$ .

При допущении, что коэффициент значительного неравенства есть величина порядка 40, минимальное число  $Re_x$  будет равно 1000. Этот результат подтвержден аналитическим решением [86], а также экспериментальным исследованием среднего коэффициента сопротивления трения [88], который представлен на рис. 8 и выражен уравнением

$$c_f = 2,90 Re^{-0,60}. \quad (2.65)$$

Некоторые авторы [89] предполагают, что формирование пограничного слоя начинается не на самой передней кромке пластины при  $x=0$ , а на некотором выдвинутом вперед расстоянии  $a_0$  (см. рис. 8), которое и определяет особенность обтекания данной передней части пластины. В результате анализа

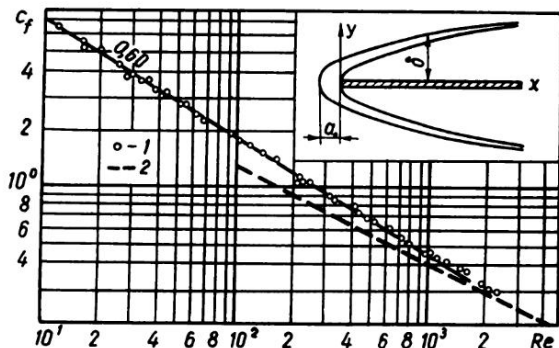


Рис. 8. Обтекание и сопротивление трения пластины при малых числах  $Re$ . 1 — по экспериментальному исследованию [88], 2 — по Блазиусу

такой модели установлено, что влияние расстояния  $a_0$  на процесс обтекания сказывается только до  $Re = \frac{U a_0}{\nu} = 40$ . На наш взгляд, это значение соответствует действительному.

## 2.6. Сопоставление результатов обтекания пластины

Сопоставление результатов точных и приближенных методов приведено в предыдущих разделах главы.

Основное внимание в данном разделе сосредоточено на сопоставлении результатов классического решения Блазиуса и результатов, полученных нами [61, 62] при изучении обтекания пластины в случае постоянного расхода жидкости, т. е. граничном условии  $v=0$  при  $y = \infty$ . Эти результаты получены при решении полных уравнений Навье—Стокса посредством экспоненциальных рядов.

На рис. 6 приведено графическое сопоставление результатов классического решения [48] с результатами наших расчетов. Графическая интерпретация скоростных профилей показывает, что в основной части пограничного слоя результаты совпадают совершенно точно, но за пределом  $\eta = 3,5$  наблюдается расхождение между профилями скоростей классического решения и полученного нами. Особенно четко это расхождение выражено на внешней границе пограничного слоя, где скорость до 12 % превышает предельную. И это нужно считать вполне закономерным явлением, так как принятие граничного условия (2.46) исключает течение жидкости в бесконечность в направлении,

перпендикулярном поверхности. Поэтому скорость жидкости вследствие вытеснения ее из пограничного слоя и постоянства расхода превышает продольную составляющую скорость потенциального потока, что и является причиной превышения классического профиля скорости.

Наряду с результатами теоретического решения на рис. 6 приведены и результаты экспериментального исследования распределения скоростей, полученные на продольно обтекаемой трансформаторным маслом пластине. Из приведенных результатов видно, что данные экспериментов удовлетворительно подтверждают теоретическое решение Блазиуса и отличаются от распределения скоростей, полученного в нашем решении. Причиной этого расхождения нужно считать обстоятельства, не позволяющие осуществить эксперимент, условия которого были бы близки условиям теоретической задачи. Видимо, для постановки такого эксперимента необходимо специализировать его, приближая к таким реальным условиям, при которых поток был бы бесконечным.

# 3 Теоретический расчет теплоотдачи пластины

Основное внимание в настоящей главе обращено на изучение влияния зависимости физических свойств жидкости от температуры на теплоотдачу пластины. В связи с этим более подробно рассмотрим возможности решения полных уравнений Навье—Стокса и энергии для продольно обтекаемой пластины в случае постоянного расхода жидкости, включая и область вне пограничного слоя.

Существенное влияние на теплоотдачу оказывают граничные условия на поверхности обтекаемого тела. Поэтому будем рассматривать теплоотдачу при постоянной температуре стенки, а также при соответствующей продольной неизотермичности поверхности.

При рассмотрении указанных тепловых задач используются как точные, так и приближенные методы решения.

## 3.1. Уравнение теплового потока

Аналогично образованию гидродинамического пограничного слоя, обтекаемого реальной жидкостью, над поверхностью, имеющей температуру, отличающуюся от температуры потока, образуется тепловой пограничный слой. Изменение температуры пристеночного потока происходит на весьма небольшом расстоянии от стенки. Эта узкая пристеночная область, в которой в направлении, перпендикулярном поверхности, существует градиент температуры, и называется температурным или тепловым пограничным слоем. Соотношение между тепловым и гидродинамическим пограничными слоями в основном зависит от рода жидкости. Учитывая изменение физических свойств с температурой, температурный пограничный слой в общем виде можно представить уравнением энергии:

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.1)$$

Для приближенных расчетов пограничного слоя может быть использовано интегральное уравнение теплового потока:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} (T_f - T) u dy = a \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0}. \quad (3.2)$$

Ниже приводятся уравнения законов охлаждения и теплопроводности, а также уравнение теплообмена:

$$q = \alpha (T_w - T_f), \quad (3.3)$$

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (3.4)$$

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta T} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (3.5)$$

которые будут использованы в дальнейшем при решении различных тепловых задач.

### 3.2. Теплоотдача изотермической поверхности

Исследование теплообмена пластины будем проводить точным методом интегрирования уравнений теплового пограничного слоя. Если считать, что физические свойства жидкости постоянны, то уравнение энергии запишется в таком виде:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.6)$$

К этому уравнению необходимо присоединить уравнения движения жидкости в пограничном слое

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

а также следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=v=0, \quad T=T_w, \\ \text{при } y=\infty \quad u=U, \quad T=T_f. \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Эта система уравнений с указанными граничными условиями впервые была решена Е. Польгаузенем [1].

Воспроизведем процесс данного решения. Во-первых, для выражения температуры принимаем безразмерное соотношение температур:

$$\Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_f}. \quad (3.8)$$

Для определения поля скоростей согласно Г. Блазиусу (см. гл. 2) принимаем, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\eta = \frac{y}{2} \left( \frac{U\rho}{\mu x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9)$$

$$\psi = \left( \mu \frac{Ux}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi(\eta). \quad (2.10)$$

В результате для определения  $\Phi(\eta)$  получим дифференциальное уравнение

$$\Phi\Phi'' + \Phi''' = 0 \quad (2.16)$$

или

$$\Phi = -\frac{\Phi''}{\Phi''}. \quad (2.16a)$$

Затем, подставив уравнения (2.9), (2.10), (2.11) и (3.8) в уравнение (3.6), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, выражающее температурное поле в пограничном слое:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + Pr \Phi \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0. \quad (3.9)$$

Новые граничные условия для этого уравнения будут такие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta = 0 \quad \Theta = 0, \\ \text{при } \eta = \infty \quad \Theta = 1. \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Тогда

$$\frac{d\Theta'}{d\eta} + Pr \Phi \Theta' = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d\Theta'}{\Theta'} = -Pr \Phi d\eta, \quad (3.12)$$

$$\ln \Theta' = -Pr \int_0^{\eta} \Phi d\eta + c, \quad (3.13)$$

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\eta} = c_1 \exp \left( -Pr \int_0^{\eta} \Phi d\eta \right), \quad (3.14)$$

$$\Theta = c_1 \int_0^{\eta} \exp \left( -Pr \int_0^{\eta} \Phi d\eta \right) d\eta. \quad (3.15)$$



Из граничного условия  $\Theta = 1$  при  $\eta = \infty$  получаем значение  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\tau} \Phi d\eta\right) d\tau} \quad (3.16)$$

И в результате из уравнения (3.9) получаем:

$$\Theta = \frac{\int_0^{\tau} \exp\left(-Pr \int_0^{\tau} \Phi d\eta\right) d\tau}{\int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta} \Phi d\eta\right) d\tau} \quad (3.17)$$

Значения функции  $\Phi$  берутся согласно расчетам Г. Блазиуса, приведенным в табл. 1.

Функция (3.16) для чисел  $Pr$  от 0,6 до 15 была рассчитана Е. Польгаузен. Значения этой функции приведены в табл. 6.

Таблица 6

Значения функции  $c_1(Pr)$

$Pr$	0,6	1,0	3,0	7,0	10	15,0
$c_1(Pr)$	0,552	0,664	0,956	1,29	1,46	1,67

Численные значения данной таблицы с небольшим приближением аппроксимируются зависимостью

$$c_1(Pr) = 0,664 \sqrt[3]{Pr} \quad (3.18)$$

Осуществленный в работе [13] анализ показывает, что зависимость Е. Польгаузена (3.8) можно интерполировать до чисел  $Pr = 1000$ .

Уравнение (3.17) дает распределение температуры в пограничном слое в зависимости от числа  $Pr$ .

Распределения температур для различных чисел  $Pr$  от 0,1 до 1000, вычисленные по зависимости (3.17), изображены на рис. 9. Кривые безразмерной температуры указывают на то, что толщина пограничного слоя с увеличением числа  $Pr$  уменьшается.

Подставив значение  $\Phi$  из (2.16а) в (3.17), при  $Pr = 1$  получаем:

$$\Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_f} = \frac{\Phi'(\eta)}{\Phi'(y = \infty)} = \frac{u}{U} \quad (3.19)$$

Эта зависимость показывает, что кривая температуры на рис. 9 для  $Pr=1$  изображает одновременно и распределение скоростей в пограничном слое. Как видно, при  $Pr > 1$  тепловой пограничный слой тоньше гидродинамического, а при  $Pr < 1$  — толще.

Ввиду отсутствия критерия  $Re$  в уравнении (3.17) температурный профиль автомоделен относительно чисел  $Re$ . Во всех сечениях пограничного слоя тем-

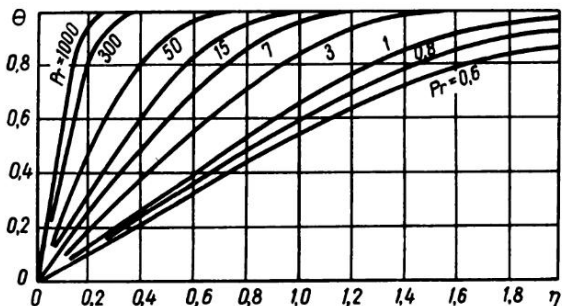


Рис. 9. Распределение температуры в тепловом пограничном слое на пластине при  $T_w = \text{const}$

пературные профили подобны между собой при одном и том же числе  $Pr$ . Анализ уравнения энергии (3.6) показывает, что при  $y=0$   $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ . Это означает, что профиль температуры вблизи стенки прямолинейный. Прямолинейность температурного профиля свидетельствует о том, что процесс теплопереноса в ламинарном пограничном слое осуществляется теплопроводностью.

Теперь переходим непосредственно к определению теплоотдачи пластины. Из выражений  $\Theta$  и  $\eta$  в (3.8) и (2.9) получаем, что

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{(\partial \Theta / \partial y)_{y=0}}{(\partial \eta / \partial y)_{y=0}} = - \frac{1}{(T_w - T_f)} \cdot \frac{(\partial T / \partial y)_{y=0}}{\frac{1}{2} \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.20)$$

Тогда, используя уравнения (3.3)–(3.5), определяем величину теплового потока от поверхности пластины:

$$q_w = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\lambda}{2} (T_w - T_f) \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\Theta}{d\eta} \right)_{\eta=0}, \quad (3.21)$$

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\Theta}{d\eta} \right)_{\eta=0}. \quad (3.22)$$

Уравнение (3.22) показывает, что местный коэффициент теплоотдачи зависит от градиента температуры на стенке, скорости, физических свойств, а также от продольной координаты. Последняя зависимость выражается

пропорциональностью  $\alpha_x \sim 1/\sqrt{x}$ . В случае  $x \rightarrow 0$   $\alpha_x \rightarrow \infty$ . Изменение коэффициента местной теплоотдачи представлено на рис. 10.

При  $\eta = 0$  из зависимостей (3.14) и (3.16) получаем:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = c_1 = \left[ \int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta} \Phi d\eta\right) d\eta \right]^{-1}, \quad (3.23)$$

а, подставив в (3.23) значение  $c_1$  из (3.18), будем иметь:

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,332 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33}. \quad (3.24)$$

Выполнив интегрирование по всей длине пластины, находим зависимость для определения средней теплоотдачи:

$$Nu = 0,664 Re^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (3.25)$$

Определение теплоотдачи пластины точным вышеприведенным методом связано с целым рядом трудностей. Во-первых, уравнения динамического

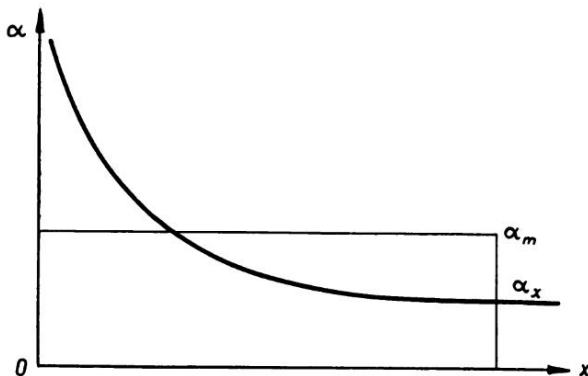


Рис. 10. Изменение местного коэффициента теплоотдачи по длине пластины

пограничного слоя, образующие совместно с уравнением энергии уравнения теплового пограничного слоя, интегрируются довольно сложным методом. Порой необходимо использовать численное интегрирование. Во-вторых, что касается точности результатов решения, то они незначительно превышают результаты, полученные приближенными методами. Поэтому при определении теплоотдачи пластины чаще всего обращаются к приближенным методам с использованием интегрального уравнения теплового потока (3.2), предложенного Г. Н. Кружилиным [4].

С помощью этих методов без особых трудностей можно получить достаточно качественную картину процесса. В дальнейшем приближенный метод будем использовать при расчете теплоотдачи пластины с начальным необогреваемым участком.

### 3.3. Теплоотдача поверхности при заданном распределении скорости $U_0 = cx^{m_1}$ на внешней границе пограничного слоя

В предыдущем разделе был рассмотрен теплообмен при постоянной скорости на внешней границе пограничного слоя. В практических условиях часто встречаются и такие случаи обтекания криволинейных тел, а также прямолинейных тел типа клиньев, когда скорость на внешней границе изменяется по определенному закону. Природа обтекания клиновидных тел влечет за собой следующий закон изменения скорости:

$$U_0 = cx^{m_1}. \quad (2.33)$$

При таком распределении скорости процесс обтекания рассматривался в главе 2.

В данном разделе речь будет идти о теплообмене клиновидных тел при температуре стенки  $T_w = \text{const}$  [90].

Если использовать переменные

$$\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{2-\beta}} \eta, \quad (2.36)$$

$$f_1 = \frac{\Phi}{\sqrt{2-\beta}}, \quad (2.26)$$

то уравнение энергии примет вид:

$$\frac{d^2 T}{d\eta_1^2} + Pr f_1 \frac{dT}{d\eta_1} = 0. \quad (3.27)$$

Граничные условия будут такие:

$$\text{при } \eta_1 = 0 \quad T = T_w,$$

$$\text{при } \eta_1 = \infty \quad T = T_f.$$

В результате интегрирования уравнения (3.27) получаем распределение температуры в пограничном слое:

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_f} = \Theta = c_2 \int_0^{\eta_1} \exp \left( -Pr \int_0^{\eta_1} f_1 d\eta_1 \right) d\eta_1. \quad (3.28)$$

С помощью граничных условий определяем значение константы  $c_2$ :

$$\frac{1}{c_2} = \int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta_1} f_1 d\eta_1\right) d\eta_1. \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.28) при различных значениях  $Pr$  и  $\beta$  можно определить распределение температуры в пограничном слое, которое графически представлено на рис. 11.

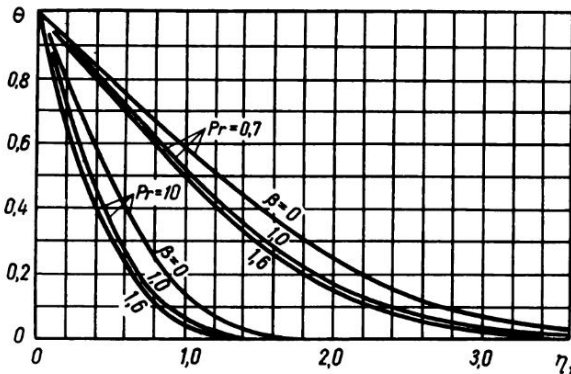


Рис. 11. Распределение температуры в тепловом пограничном слое клиновидных тел при  $T_w = \text{const}$

Используя градиент температуры на стенке, из уравнения (3.5) находим местный коэффициент теплообмена:

$$\alpha_x = -\frac{\lambda}{T_w - T_f} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{u}{\nu x}} c_2. \quad (3.30)$$

В безразмерной форме это выразится так:

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = \frac{c_2}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{Re_x}. \quad (3.31)$$

Коэффициент  $c_2$  для различных значений  $Pr$  и  $\beta$ , определенный Э. Эккертом [90], может быть обобщен зависимостью

$$c_2(Pr, \beta) = 0,56 (\beta + 0,2)^{0,1} Pr^{0,333 + 0,067 \beta - 0,026 \beta^2}. \quad (3.32)$$

Тогда для выражения местного теплообмена различных клиновидных тел будем иметь:

$$Nu_x = 0,56 \frac{(\beta + 0,2)^{0,1}}{\sqrt{2-\beta}} Re_x^{0,5} Pr^{0,333 + 0,067 \beta - 0,026 \beta^2}. \quad (3.33)$$

Уравнение (3.33) дает полную динамику изменения местного теплообмена на поверхности клиновидных тел в зависимости от их угла раствора  $\beta$ .

### 3.4. Влияние необогреваемого начального участка на теплоотдачу пластины

В плоских элементах теплообменных аппаратов из-за наличия начального необогреваемого участка часто имеет место одновременное развитие гидродинамического и теплового пограничных слоев. В результате их взаимодействия наблюдается существенное влияние необогреваемого начального участка на формирование теплового пограничного слоя и, следовательно, на теплообмен.

Этот случай теплообмена довольно просто решается приближенным методом [5]. Рассмотрим решение теплоотдачи пластины в потоке жидкостей при  $Pr > 1$ , т. е., когда тепловой пограничный слой тоньше динамического (рис. 12).

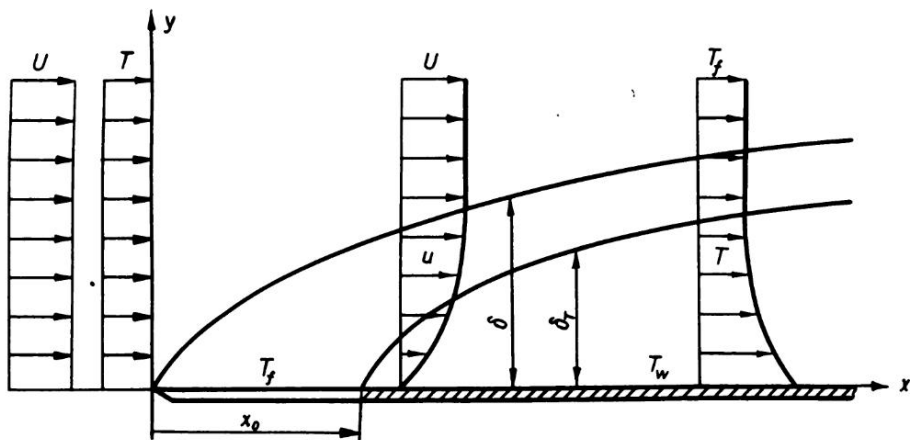


Рис. 12. Обтекание пластины с необогреваемым начальным участком

Температура поверхности пластины, участвующей в теплообмене, принимается постоянной,  $T_w = \text{const}$ .

Теплообмен пластины описывается интегральным уравнением теплового потока (3.2). В процессе решения к нему необходимо присоединить заданное распределение температуры в пограничном слое, а также результаты решения уравнений импульса в случае обтекания пластины.

В главе 2 при рассмотрении обтекания пластины кривая распределения

скоростей в ламинарном пограничном слое была описана кубической параболой и в окончательном виде выражена уравнением

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (2.28)$$

Анализ уравнения теплообмена (3.4) при заданных граничных условиях (3.7) показывает, что распределение температуры может быть также выражено кубической параболой. При этом в окончательном виде будем иметь уравнение, аналогичное по форме уравнению распределения скоростей:

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_f} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (3.34)$$

После подстановки выражения (3.34) и (2.28) в интегральное уравнение (3.2), находим:

$$\begin{aligned} U [T_w - T_f] \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \\ = -a \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из зависимости (3.34) получаем, что

$$\left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = -\frac{3}{2} \frac{(T_w - T_f)}{\delta_T}. \quad (3.36)$$

Вычислив интеграл и обозначив  $\xi = \frac{\delta_T}{\delta}$ , из (3.35) получаем:

$$U (T_w - T_f) \frac{d}{dx} \delta \left[ \frac{3}{20} \xi^2 - \frac{3}{280} \xi^4 \right] = a \frac{3}{2} \frac{T_w - T_f}{\delta_T}. \quad (3.37)$$

Ввиду того, что  $\delta_T < \delta$ , членом  $(3/280)\xi^4$  в данном уравнении можно пренебречь. Упростив уравнение (3.37), имеем:

$$U \frac{\delta \xi}{10} \frac{d}{dx} (\xi^2 \delta) = a. \quad (3.38)$$

Продифференцировав, находим, что

$$U \frac{1}{10} \left( \xi^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + 2\xi^2 \delta^2 \frac{d\xi}{dx} \right) = a. \quad (3.39)$$

После подстановки значений  $\delta \frac{d\delta}{dx}$  из уравнения (2.31) и  $\delta^2$  из уравнения (2.32) получим:

$$\frac{14}{13} \frac{\nu}{a} \left( \xi^3 + 4x\xi^2 \frac{d\xi}{dx} \right) = 1. \quad (3.40)$$

Соотношение  $\frac{14}{13}$  приблизительно может быть принято равным единице. Тогда, приняв в последнем уравнении  $\xi^3 = z$ , имеем:

$$z + \frac{4}{3} x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{Pr}. \quad (3.41)$$

В результате решения данного дифференциального уравнения получаем:

$$z = \frac{1}{Pr} + cx^{-\frac{3}{4}}. \quad (3.42)$$

Из граничных условий  $x = x_0$ ,  $\xi = 0$  или  $z = 0$  следует:

$$c = -\frac{x_0^{\frac{3}{4}}}{Pr}.$$

Тогда

$$\xi = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}} \cdot \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}}. \quad (3.43)$$

В этом уравнении  $x_0$  является длиной той части пластины, на которой не происходит теплообмена, т. е. температура стенки равна температуре потока  $t_f$ .

Если принять, что  $x_0 = 0$ , т. е. вся поверхность пластины участвует в теплообмене и формирование теплового и динамического пограничных слоев начинается одновременно, то из (3.43) получим соотношение между толщинами этих слоев:

$$\xi = \frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}. \quad (3.44)$$

Далее переходим непосредственно к определению коэффициента теплоотдачи. Используя зависимость (3.36), из (3.5) находим:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_w - T_f} \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\xi \delta}. \quad (3.45)$$



Подставив в это уравнение значение  $\xi$  из (3.43) и  $\delta$  из (2.32), имеем следующую зависимость для определения коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = 0,324 \lambda \frac{\sqrt[3]{Pr}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^4}} \sqrt{\frac{U}{vx}}. \quad (3.46)$$

После преобразований получаем выражение теплоотдачи в критериальном виде:

$$Nu_x = 0,324 \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^4}}. \quad (3.47)$$

Для местной теплоотдачи пластины, нагреваемой по всей длине, при  $x_0 = 0$  получаем:

$$Nu_x = 0,324 \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_x}. \quad (3.48)$$

Как видим, последняя зависимость довольно хорошо согласуется с зависимостью (3.24), полученной точным методом решения.

### 3.5. Теплоотдача неизотермической поверхности

Применение на практике таких высокоэффективных теплообменных поверхностей, как различные оребрения, при больших тепловых нагрузках и скоростях приводит к изменению температуры теплообменной поверхности вдоль потока. Поверхность становится неизотермической. В настоящее время в преобладающем большинстве случаев процесс теплообмена протекает именно при определенной неизотермичности поверхности. Неизотермичность поверхности очень четко выражается через температурный напор между температурами поверхности и потока. Изменение температурного напора может быть задано различными законами: степенным, ступенчатым, линейным; в практических же условиях оно носит произвольный характер.

Все виды неизотермичности поверхности, иначе говоря, продольный градиент температуры поверхности оказывают существенное влияние на развитие процесса теплообмена. Указанное влияние в основном обусловлено наличием деформации распределения температуры в тепловом пограничном слое и изменением толщины данного слоя.

Процессы теплообмена с перечисленными особенностями, протекающие на неизотермической поверхности, могут быть исследованы теоретическими методами.

**1. Расчет теплообмена при степенной неизотермичности поверхности.** Для данного вида неизотермичности в процессе решения распределение температурного напора вдоль поверхности задается следующей зависимостью:

$$T_{wx} - T_f = \Delta t_x = Ax^{m_1}. \quad (3.49)$$

В общем случае принимается, что скорость на внешней границе динамического пограничного слоя выражается тоже по степенному закону:

$$U_0 = cx^{m_2}. \quad (2.33)$$

Принимая указанные распределения температуры и скорости, а также то, что физические свойства не зависят от температуры, для решения задачи используем систему уравнений пограничного слоя (2.34), (2.6) и (3.6). К этим уравнениям присоединяем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=v=0, \quad T=T_w, \\ \text{при } y=\infty \quad u=U_0, \quad T=T_f. \end{array} \right\} \quad (3.50)$$

Рассмотрим точный метод решения, предложенный в работе С. Леви [25]. В процессе этого решения вводятся переменные по [53]:

$$\eta_1 = y \sqrt{\frac{(1+m_1)U_0}{2\nu x}}, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{1+m_1}} \nu x U_0 \Phi(\eta_1), \quad (2.36)$$

где  $\psi_1$  — функция тока, аналогичная (2.10).

Тогда уравнения движения и энергии преобразуются следующим образом:

$$\Phi'' + \Phi\Phi'' + \beta(1 - \Phi'^2) = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{d^3\Theta}{d\eta_1^3} + \Phi Pr \frac{d\Theta}{d\eta_1} - Pr(2 - \beta)n_1\Phi\Theta = 0, \quad (3.51)$$

где

$$\beta = \frac{2m_1}{1+m_1}, \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_w - T_f}.$$

В данном случае граничные условия будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta_1 = 0 \quad \Theta = 1, \\ \text{при } \eta_1 = \infty \quad \Theta = 0. \end{array} \right\} \quad (3.52)$$

Результаты решения уравнения (2.38) для некоторых  $\beta$  по работе Д. Хартри [53] представлены в таблице 3 (см. гл. 2).

Решение может быть получено численным интегрированием на ЭВМ при различных значениях  $Pr$ ,  $\beta$  и  $n_1$ . Результаты такого решения для пластины и других клиновидных тел в виде градиента температуры на стенке  $\left(\frac{d\Theta}{d\eta_1}\right)_{\eta_1=0}$  представлены в таблицах 7–10. Из выражения для  $\Theta$  и  $\eta_1$  (2.36) получаем, что

$$\left(\frac{d\Theta}{d\eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \frac{(d\Theta/dy)_{y=0}}{(d\eta_1/dy)_{y=0}} = -\frac{(\partial T/\partial y)_{y=0}}{(T_w - T_f) \sqrt{\frac{1}{2-\beta}} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}}. \quad (3.53)$$

Используя уравнения (3.3)–(3.5), определяем величину теплового потока на поверхности

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \lambda \frac{T_w - T_f}{\sqrt{2-\beta}} \left(\frac{d\Theta}{d\eta_1}\right)_{\eta_1=0} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}, \quad (3.54)$$

Таблица 7

Значения градиента температуры при обтекании пластины

$n_1 \backslash Pr$	0,70	2,0	10	20
-0,50	0	0	0	0
-0,25	-0,2700	-0,3789	-0,6257	-0,7668
0,00	-0,4065	-0,5822	-0,9863	-1,230
0,25	-0,4989	-0,7130	-1,210	-1,513
0,50	-0,5690	-0,8112	-1,377	-1,721
1,00	-0,6746	-0,9593	-1,625	-2,024
2,00	-0,8218	-1,165	-1,965	-2,445
3,00	-0,9296	-1,316	-2,211	-2,741

Таблица 8

Значения градиента температуры на стенке при  $\beta=1$ 

$n_1 \backslash Pr$	0,7	1,0	5,0	10,0
-1,0	0	0	0	0
-0,75	-0,1755	-0,2000	-	-0,4062
-0,25	-0,4093	-0,4708	-	-1,081
0	-0,4879	-0,5603	-1,011	-1,286
0,25	-0,5535	-0,6345	-1,141	-1,451
0,50	-0,6094	-0,6979	-1,251	-1,590
1,00	-0,7033	-0,8116	-1,432	-1,818
2,00	-0,8461	-0,9647	-	-2,159
3,00	-0,9567	-1,089	-1,914	-2,418

Таблица 9

Значения градиента температуры на стенке при  $\beta=1,6$ 

$n_1 \backslash Pr$	0,7	1,0	5,0	10,0
-2,50	0	0	0	0
-1,50	-0,2687	-0,3101	-0,5587	-0,7005
-0,50	-0,4413	-0,5085	-0,9303	-1,186
0,00	-0,5062	-0,5828	-1,064	-1,357
0,25	-0,5353	-0,6161	-1,122	-1,432
0,50	-0,5626	-0,6468	-1,176	-1,501
1,00	-0,6120	-0,7031	-1,275	-1,626
2,00	-0,6975	-0,7995	-0,442	-1,836
3,00	-0,7692	0,8808	-1,581	-2,010

Таблица 10

Значения градиента температуры на стенке при  $\beta=-0,199$ 

$n_1 \backslash Pr$	0,7	1,0	5,0	10,0
-0,46	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,25	-0,1955	-0,2168	-0,3290	-0,3894
0,00	-0,2930	-0,3227	-0,4884	-0,5806
0,25	-0,3476	-0,3820	-0,5760	-0,6848
0,50	-0,3861	-0,4237	-0,6375	-0,7581
1,00	-0,4412	-0,4835	-0,7257	-0,8629
2,00	-0,5134	-0,5622	-0,8424	-1,002
3,00	-0,5641	-0,6174	-0,9245	-1,099

Местный теплообмен пластины ( $\beta=0$ ) будет выражаться следующей зависимостью:

$$Nu_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d\Theta}{d\eta_1} \right)_{\eta_1=0} Re_x^{0,5}. \quad (3.55)$$

При расчете теплоотдачи значения градиента температуры в уравнениях (3.54) и (3.55) необходимо брать из таблиц 7–10.

Из уравнения (3.55) видна зависимость критерия  $Nu_x$  от ряда факторов, которую можно представить так:

$$Nu_x = c(\beta, n_1) Re_x^{0,5} Pr^n, \quad (3.56)$$

где в общем случае

$$c(\beta, n_1) = 0,40 (\beta + 0,2)^{0,1} [n_1 (2 - \beta) + 1]^{0,37 + 0,06 \beta}, \quad (3.57)$$

а для пластины —

$$c(\beta, n_1) = 0,33(2n_1 + 1)^{0,37}. \quad (3.58)$$

В результате расчетов (3.33) определено, что показатель степени при числе  $Pr$  изменяется в зависимости от  $\beta$  в интервале  $n = 0,37 - 0,25$ . Для продольно обтекаемой пластины  $n = 0,33$ .

Решение уравнения (3.51) позволяет определить температурные профили в пограничном слое при различных  $\beta$  и  $n_1$ . Для пластины  $\beta = 0$  и других клиновидных тел картина изменения температурных профилей  $\Theta = f(n_1)$  представлена на рис. 13. Из графической интерпретации видно, что при высоких уровнях

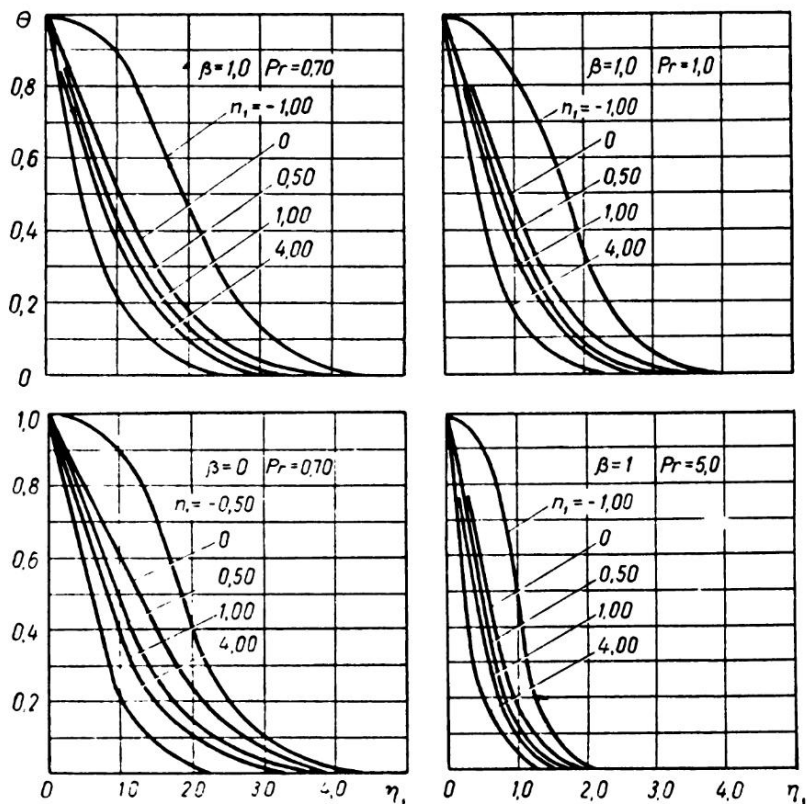


Рис. 13. Распределение температуры в тепловом пограничном слое клиновидных тел в случае неизотермической по длине поверхности

неизотермичности, а также с увеличением  $\beta$  профиль температуры становится более заполненным, что указывает на меньшую толщину пограничного слоя. На основании того, что толщина теплового пограничного слоя обратно пропорциональна коэффициенту теплоотдачи, можно утверждать, что неизотермичность поверхности приводит к изменению интенсивности теплообмена. Зависимость теплоотдачи от степени неизотермичности поверхности, выраженной

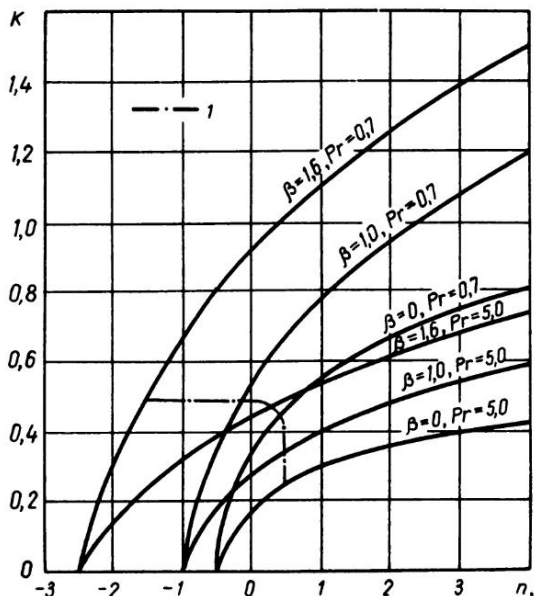


Рис. 14. Влияние степенной неизотермичности поверхности, клиновидности тела и числа  $Pr$  на теплоотдачу. 1 — постоянный тепловой поток.  $K = Nu_x Re_x^{-0,5} Pr^{-0,33}$

через  $n_1$ , для тел с различными значениями  $\beta$  при  $Pr=0,7$  и  $5,0$  показана на рис. 14.

**2. Расчет теплообмена при ступенчатой неизотермичности поверхности.** В работе [27] предложен приближенный метод решения теплоотдачи пластины и других клинообразных тел при ступенчатом изменении температуры поверхности (рис. 15). Сначала рассмотрим наиболее простой случай двухступенчатого изменения температуры стенки, когда первая ступень  $x_0$  является необогреваемой. Для решения используются уравнения пограничного слоя (2.34), (2.6) и (3.6), а физические свойства жидкости принимаются постоянными. Распределения скорости и температуры в пограничных слоях задаются соответствующими экспоненциальными законами:

$$u = U_0 [\exp(E_1 y + E_2 y^2 + E_3 y^3 \dots)], \quad (3.59)$$

$$T - T_f = T_w - T_f \left[ \exp\left(\frac{F_1}{x-x_0} y + \frac{F_2}{x-x_0} y^2 + \frac{F_3}{x-x_0} y^3 \dots\right) \right]. \quad (3.60)$$

В процессе решения принимаются следующие граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad T=T_w, \quad \text{когда } x > x_0,$$

$$T=T_f, \quad \text{когда } x = x_0,$$

$$\text{при } y = \infty \quad u = U_0, \quad T = T_f.$$

Неизвестные функции  $E$  и  $F$  определяются из уравнений пограничного слоя (2.34) и (3.6) путем трехкратного дифференцирования по  $y$  при граничном

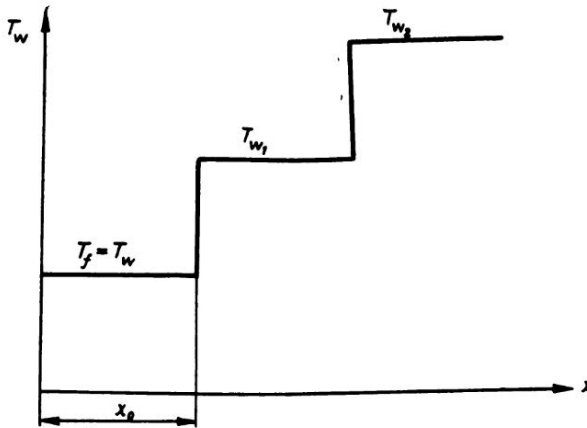


Рис. 15. Ступенчатая неизотермичность поверхности тела

условию  $y=0$ . Для определения производных в полученных восьми уравнениях используются зависимости (3.59), (3.60).

Учитывая изменение скорости на границе пограничного слоя, согласно (2.33) получаем зависимость для определения теплоотдачи пластины ( $\beta=0$ ,  $m_1=0$ ):

$$\frac{Nu_x}{Nu_x(x_0=0)} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.61)$$

В исследовании [27] для расчета теплоотдачи всего класса клиновидных тел получено аналогичное уравнение:

$$\frac{!Nu_x}{Nu_x(x_0=0)} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{2}(2-\beta)}\right]^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.62)$$

Изложенный метод определения теплоотдачи может быть использован только в случае двухступенчатой неизотермичности поверхности. Но в даль-

нейшем полученные результаты (3.61), (3.62) будут использоваться для расчета теплоотдачи как в случае многоступенчатой неизотермичности поверхности, так и в случае произвольно изменяющейся температуры поверхности тела.

Для расчета теплового потока при многоступенчатой неизотермичности поверхности, даже если температура на отдельных ступенях изменяется произвольно, может быть использована методика, изложенная Э. Эккертом и Р. Дрейком [5].

**3. Расчет теплоотдачи при произвольном изменении температуры поверхности.** Кроме ступенчатой неизотермичности поверхности на практике очень

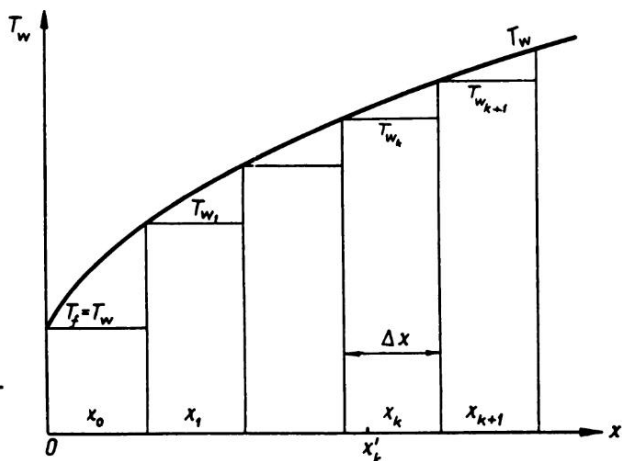


Рис. 16. Произвольно изменяющаяся температура теплообменной поверхности

часто встречаются случаи, когда температура поверхности вдоль потока изменяется непрерывно и произвольно (см. рис. 16), не подчиняясь порой никакому аналитически обобщаемому закону.

С. Сцеса и С. Леви [27] для этого случая использовали уравнения теплового пограничного слоя (3.6), предполагая, что их решением будет несколько измененная зависимость (3.60):

$$\frac{T - T_f}{T_w - T_f} = \Theta, \quad (3.63)$$

где

$$\Theta = \Theta(x, y, x_k), \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Граничные условия принимались следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad x > x_0, \quad T = T_w, \quad \Theta = 1, \\ \text{при } y = \infty, \quad T = T_f, \quad \Theta = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$



Если температура поверхности изменяется по произвольному закону, то этот закон всегда приближенно может быть заменен другим, например, ступенчатым (как показано на рис. 16) законом изменения температуры стенки, при котором  $T_w = T_{w_{k+1}}$ , если  $x_k < x < x_{k+1}$ .

Ввиду линейности уравнения (3.6) относительно температурного напора  $T - T_f$  или температуры решение его в виде зависимости (3.63) при  $x_0 \leq x$  с учетом граничных условий может быть представлено суммой  $T_w$ . В случае  $k=1$  получаем:

$$T - T_f = (T_{w_1} - T_f) \Theta_{x_1} + (T_{w_2} - T_{w_1}) \Theta_{x_2}. \quad (3.65)$$

В общем случае, когда  $k=n$  (см. рис. 16), распределение температуры аналогично уравнению (3.65) можно представить зависимостью:

$$T - T_f = (T_{w_n} - T_f) \Theta_{x_n} + \sum_{k=1}^n (T_{w_{k+1}} - T_{w_k}) \Theta_{x_k}. \quad (3.66)$$

Если применить теорему средних разностей при  $y=0$ , то получим:

$$T_{w_{k+1}} - T_{w_k} = \frac{\Delta T_{x_k}}{\Delta x} \Delta x, \quad (3.67)$$

а уравнение (3.66) при  $\Delta x = x_{k+1} - x_k \rightarrow 0$ , когда количество ступенек  $n \rightarrow \infty$ , примет вид:

$$T - T_f = (T_{w_1} - T_f) \Theta_{x_0} + \int_0^x \frac{[\partial T_k]}{\partial x_k} \Theta_{x_k} dx_k. \quad (3.68)$$

Для местного теплового потока на стенке при использовании уравнений (3.3) - (3.5) имеем:

$$q_w = \alpha_x (T_w - T_f) = - \frac{\lambda \partial (T - T_f)}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3.69)$$

Продифференцировав уравнение (3.63) относительно  $y$  и умножив на  $-\lambda$ , получим зависимость:

$$-\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{T_w - T_f} = \alpha_x (x_0 = 0). \quad (3.70)$$

Тепловой поток на стенке определяем по уравнению (3.69), подставляя в него значения температурного напора из (3.68) с учетом (3.70):

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial (T - T_f)}{\partial y} \right|_{y=0} = -\lambda (T_{w_1} - T_f) \left( \frac{\partial \Theta_{x_2}}{\partial y} \right)_{y=0} +$$

$$+ (-\lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_0^x \frac{\partial T_{x_k}}{\partial x_k} \Theta_{x_k} dx_k \right], \quad (3.71)$$

$$q_w = (T_{w_1} - T_f) \left( -\lambda \frac{\partial \Theta_{x_2}}{\partial y} \right)_{y=0} + \int_0^x \frac{\partial T_{x_k}}{\partial x_k} (-\lambda) \frac{\partial \Theta_{x_k}}{\partial y} dx_k, \quad (3.72)$$

$$q_w = (T_{w_1} - T_f) \alpha_{x(x_0=0)} + \int_0^x \frac{\partial T_{x_k}}{\partial x_k} \alpha_x dx_k, \quad (3.73)$$

$$q_w = \alpha_x(x_0=0) \left[ (T_{w_1} - T_f) + \int_0^x \frac{\alpha_x}{\alpha_x(x_0=0)} \frac{\partial T_{x_k}}{\partial x_k} dx_k \right]. \quad (3.74)$$

Заменив в уравнении (3.74) соотношение  $\frac{\alpha_x}{\alpha_x(x_0=0)}$  соотношением  $\frac{Nu_x}{Nu_x(x_0=0)}$ , из уравнения (3.62) получаем зависимость

$$q_w = \alpha_x(x_0=0) \left[ (T_{w_1} - T_f) + \int_0^x \frac{Nu_x}{Nu_x(x_0=0)} \frac{\partial T_{x_k}}{\partial x_k} dx_k \right], \quad (3.75)$$

позволяющую определить местный тепловой поток на поверхности в случае произвольного изменения ее температуры.

Если принять, что изменение температурного напора по длине теплообменной поверхности происходит по степенному закону (3.49), то, учитывая зависимости (3.49) и (3.61), уравнение (3.75) можно преобразовать в следующее:

$$q_w = \alpha_x(x_0=0) \frac{4}{3} Ax^{n_1} n_1 \int \left( \frac{x_0}{x} \right)^{n_1-1} \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{1}{3}} d \frac{x_0}{x}. \quad (3.76)$$

Полученное уравнение выражает величину теплового потока на поверхности пластины с учетом влияния ее степенной неизотермичности.

Выполнив ряд расчетных операций, из уравнения (3.76) получаем:

$$q_w = \alpha_x(x_0=0) (T_w - T_f) \frac{4}{3} \cdot n_1 \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1 + \frac{2}{3}\right)}, \quad (3.77)$$

где  $\alpha_x(x_0=0)$  — коэффициент теплообмена пластины при постоянной температуре поверхности,  $\Gamma$  — гамма-функции, значения которых приведены в табл. 1 приложений.

Левую часть уравнения (3.77) составляет удельный тепловой поток, а множитель  $T_w - T_f$  в правой части является местным температурным напором. После преобразования получаем соотношение коэффициентов теплоотдачи пластины для поверхности, неизотермической по длине. Соотношение выражается уравнением

$$\chi = \frac{Nu_x(n_1 \neq 0)}{Nu_x(n_1 = 0)} = \frac{4}{3} n_1 \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1 + \frac{2}{3}\right)}, \quad (3.78)$$

где  $\chi$  — коэффициент неизотермичности поверхности. Из полученного уравнения видно, какую важную роль в процессе теплообмена играет термическое состояние поверхности или граничные условия на ней.

Вышеприведенная методика [27] определения теплообмена при произвольно изменяющейся температуре поверхности пластины заключает в себе некоторые трудности. Э. Экерт, И. Гартнетт и Р. Биркебак для расчета данного вида неизотермичности предложили другой, сравнительно простой метод [33] определения характеристик теплообмена.

Метод частично является графоаналитическим. В процессе решения температурная кривая разделяется на определенное количество ( $k$ ) равных интервалов  $\Delta l$  (рис. 17), где в пределах одного интервала изменением продольного

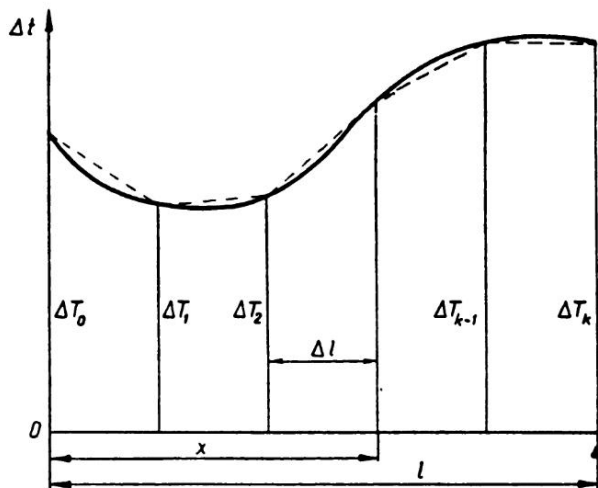


Рис. 17. Приближенное выражение непрерывно изменяющейся температуры поверхности прямоугольными сегментами

градиента температуры, т. е.  $d(\Delta T)/dx = \text{const}$ , можно пренебречь. Это условие позволяет преобразовать зависимость (3.75) в уравнение

$$q_w = \alpha_{x(x_0=0)} \left[ \Delta T_0 + \left( \frac{d(\Delta T)}{dx} \right)_{0-x_1} \int_0^{x_1} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} dx_k + \right. \\ \left. + \left( \frac{d(\Delta T)}{dx} \right)_{x_1-x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} dx_k \dots \right]. \quad (3.79)$$

Любой из этих интегралов может быть выражен так:

$$\int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} dx_k = x \left[ \int_0^{x_l/x} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} d \frac{x_k}{x} \int_0^{x_{l-1}/x} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} d \frac{x_k}{x} \right]. \quad (3.80)$$

Если использовать уравнение (3.61) и провести некоторые расчетные операции, интегралы в правой части уравнения (3.80) могут быть достаточно точно аппроксимированы зависимостью:

$$\int_0^{x_l/x} \frac{\alpha_x}{\alpha_{x(x_0=0)}} d \frac{x_k}{x} = A \left( \frac{x_l}{x} \right) + B \left( \frac{x_l}{x} \right)^2.$$

Подставив эту зависимость в (3.79), получаем обобщенное выражение для локального и среднего теплового потока на поверхности пластины:

$$q_w = \alpha_{x(x_0=0)} \left\{ \Delta T_0 + A (\Delta T_k - \Delta T_0) + B \frac{\Delta l}{x} \left[ -\Delta T_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\Delta T_1 - 2\Delta T_2 \dots - 2\Delta T_{k-1} + (2k-1) \Delta T_k \right] \right\}, \quad (3.81)$$

где  $\alpha_{x(x_0=0)}$  — местный или средний коэффициент теплоотдачи при постоянной температуре поверхности. Значения коэффициентов  $A$  и  $B$  в уравнении (3.81) рассчитаны [33] для интервала изменения соотношения  $\frac{x_l}{x}$  от 0 до 1,0. Для местного теплообмена получено:  $A=0,995$ ,  $B=0,446$ , а для среднего теплообмена —  $A=0,969$ ,  $B=-0,452$ .

Формула (3.81), как показывают расчеты, по точности определения коэффициента теплоотдачи не уступает формулам других приближенных методов.

Д. А. Лабунцов предложил итерационный метод расчета теплообмена при произвольном изменении температуры поверхности пластины. Этот сравнительно простой метод впервые был изложен им в 1962 г. на Каунасском симпозиуме [36, 120]. В опубликованном материале этот метод рассматривается лишь частично, поэтому позволим себе изложить его более подробно.

В случае произвольного изменения температурного напора по длине пластины решение теплообмена основывается на дифференциальных уравнениях пограничного слоя (2.5), (2.6) и (3.6). При постоянных физических свойствах уравнения (2.5) и (3.6) с помощью уравнения неразрывности (2.6) могут быть преобразованы в следующие:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \quad (3.82)$$

$$u \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] = \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (3.83)$$

Граничные условия будут такие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0, \quad T=T_w(x), \\ \text{при } y=\delta \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \text{при } y=\delta_T \quad T=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0. \end{array} \right\} \quad (3.84)$$

Символ  $T$  означает температурный напор или температуру жидкости в пограничном слое, отсчитанную от температуры набегающего потока.

Температура поверхности  $T_w(x)$  представляет произвольную функцию продольной координаты.

Решение рассматривается для условий  $\delta_T \leq \delta$ , которые для изотермической поверхности соответствуют  $Pr \geq 1$ .

Распределения температур и скоростей в пограничном слое находятся путем последовательных приближений. Таким же образом определяются гидродинамические и тепловые характеристики.

В первом приближении принимаются линейные распределения скоростей и температур в пограничных слоях.

В этом случае левые, нелинейные части уравнений (3.82) и (3.83) можно приравнять к нулю и получить следующие линейные изменения температуры и продольной компоненты скорости поперек пограничного слоя:

$$\frac{T}{T_w} = 1 - \frac{y}{\delta_T}, \quad (3.85)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}. \quad (3.86)$$

На втором этапе вычисляются ранее отброшенные члены уравнений. Для этого используются результаты, полученные в первом приближении, что дает приближенные значения для нелинейных частей уравнений. Таким образом, получаем приближенные уравнения пограничного слоя, которые при интегрировании с учетом граничных условий (3.84) дают уточненные профили скоростей и температур. Такой итерационный расчет можно продолжать и дальше, но в данном случае ограничимся вторым приближением. Тогда после вычисления нелинейных частей уравнений (3.82) и (3.83) уравнения энергии и движения выражаются так:

$$b_1 \left( b_2 \frac{y}{\delta_T} - b_3 \frac{y^2}{\delta_T^2} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3.87)$$

$$b_4 \frac{y^2}{\delta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.88)$$

Значения функций  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  будут следующими:

$$b_1 = 8 Pr T_w \frac{\delta_T}{\delta^3}, \quad b_2 = \frac{d \ln T_w}{d \ln \delta}, \quad b_3 = \frac{d \ln \delta_T}{d \ln \delta} - \frac{d \ln T_w}{d \ln \delta} - \frac{1}{2},$$

$$b_4 = \frac{u^2}{2\nu} \frac{d \ln \delta}{dx}. \quad (3.89)$$

В результате двукратного интегрирования (3.87) и (3.88) при использовании граничных условий получаем следующие решения гидродинамической и тепловой задачи:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4}{\sqrt{Re}}, \quad (3.90)$$

$$\tau_w = 0,333 \left( \frac{\nu}{Ux} \right)^{\frac{1}{2}} \rho U^2, \quad (3.91)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{4y}{3\delta} - \frac{y^2}{3\delta^2}, \quad (3.92)$$

$$T = b_1 \delta_T^2 \left[ \left( \frac{y^2}{3\delta_T^2} - \frac{y}{\delta_T} + \frac{2}{3} \right) \frac{b_2}{2} - \left( \frac{y^2}{4\delta_T^2} - \frac{y}{\delta_T} + \frac{3}{4} \right) \frac{b_3}{3} \right]. \quad (3.93)$$

При граничном условии  $T_{y=0} = T_w$  получаем:

$$T_w = b_1 \delta_T^2 \left( \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} \right). \quad (3.94)$$

С помощью уравнений теплопроводности (3.4) и (3.93) определяем местный тепловой поток на стенке:

$$q_w = 0,333 \lambda T_w \left( \frac{U}{vx} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{v}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \chi, \quad (3.95)$$

где

$$\chi = \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\int_0^{x^{\frac{3}{4}}} T_w dx^{\frac{3}{4}}}{T_w x^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{d \ln T_w}{d \ln x} \right) \left( \frac{\int_0^{x^{\frac{3}{4}}} T_w dx^{\frac{3}{4}}}{T_w x^{\frac{3}{4}}} \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.96)$$

В случае постоянной температуры стенки  $T_w = \text{const}$ ,  $\chi = 1$ ; уравнение (3.95) точно выражает теплообмен при  $T_w = \text{const}$  [см. (3.24)]  $\chi$  можно назвать коэффициентом, учитывающим влияние неизоотермичности поверхности на теплообмен.

Формула (3.96) позволяет определить влияние неизоотермичности поверхности на теплообмен при любом, аналитически заданном законе изменения температурного напора. Как было указано выше, наиболее распространенным видом неизоотермичности является неизоотермичность, выраженная степенным законом (3.49). В этом случае коэффициент  $\chi$  примет вид

$$\chi = \frac{1 + n_1}{\left( 1 + \frac{4}{3} n_1 \right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.97)$$

Приняв граничные условия  $0 < x < x_0$ ,  $T = 0$  при  $x = x_0$ ,  $T = T_w$ ,  $T_w = \text{const}$  при  $x > x_0$ , получаем случай ступенчатой неизоотермичности (см. рис. 15). Используя уравнение (3.96), определяем коэффициент неизоотермичности:

$$\chi = \left( T_w x^{\frac{3}{4}} / \int_{x_0^{\frac{3}{4}}}^{x^{\frac{3}{4}}} T_w dx^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.98)$$

При  $T_w = \text{const}$  окончательно получаем:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}}}}. \quad (3.99)$$

Полученная зависимость (3.99) полностью совпадает с решением (3.47), выражающим влияние необогреваемого начального участка, как вида ступенчатой неизотермичности, на теплообмен пластины.

Следует обратить внимание на вид линейной неизотермичности, т.е., когда температурный напор изменяется по закону

$$T_w = T_{w_0} \left( 1 + \beta_0 \frac{x}{l} \right). \quad (3.100)$$

Этот вид неизотермичности обладает некоторыми особенностями, а именно: здесь нарушается характерная для коэффициента теплоотдачи пластины

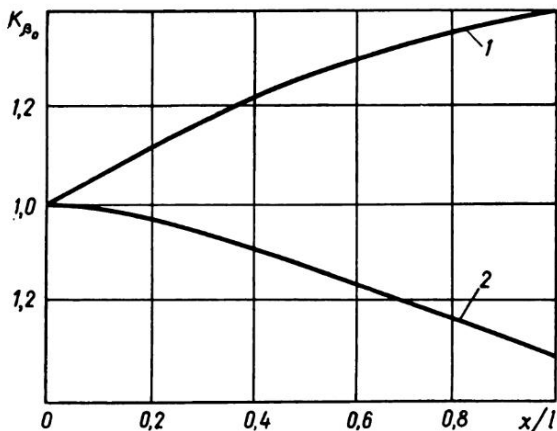


Рис. 18. Местная теплоотдача пластины при линейном изменении температурного напора. 1 — при  $\beta_0=1$ , 2 — при  $\beta_0=-0,25$ .  $K_{\beta_0} = \alpha_x (\beta_0 \neq 0) / \alpha_x (\beta_0 = 0)$

пропорциональность  $\alpha \sim x^{-0,5}$ . Коэффициент  $\beta_0$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В случае, когда  $\beta_0=0$ , поверхность является изотермической. Д. А. Лабунцовым [36] было рассчитано изменение коэффициента теплообмена при  $\beta_0=1$  и  $\beta_0=-0,25$ , которое представлено на рис. 18 в виде функции  $\alpha_x (\beta_0 \neq 0) / \alpha_x (\beta_0 = 0) = f(x/l)$ . Из графической интерпретации видно, что при возрастающем температурном напоре ( $\beta_0 > 0$ ) теплообмен более интенсивен, а при убывающем ( $\beta_0 < 0$ ) менее интенсивен по сравнению с теплообменом изотермической поверхности. Таким образом, приходим к выводу, что не все виды неизотермичности интенсифицируют процесс теплообмена.

### 3.6. Влияние зависимости физических свойств жидкости от температуры на теплоотдачу пластины

В тех случаях, когда физические свойства жидкостей зависят от температуры, температурные градиенты, существующие в пограничном слое, вызывают взаимодействие скоростных и температурных полей, которые, в свою очередь,



вливают на теплообмен. Теплообмен в данном случае может быть исследован аналитическими методами, которые значительно сложнее методов, используемых в случае постоянных физических свойств.

При этом в отдельных случаях величины, характеризующие зависящие от температуры физические свойства, например, в дифференциальных уравнениях пограничного слоя, не могут быть вынесены из-под знака дифференциала. Уравнения движения и энергии решаются совместно при обязательном присоединении к ним температурных зависимостей, принятых переменными физических свойств. Из всех физических свойств жидкостей сильнее изменяется вязкость. Поэтому в большинстве случаев при теоретических расчетах учитывают лишь влияние вязкости на теплоотдачу. Иногда принимают во внимание изменение теплопроводности и других физических свойств жидкости.

**1. Определение теплоотдачи пластины при переменной вязкости.** С. Тарг [17] предложил метод решения теплообмена при обтекании пластины капельной жидкостью с переменным коэффициентом вязкости. В этом случае, используя уравнения движения и энергии (2.1a), (3.1) и заменив местное ускорение частиц жидкости средними их значениями по толщине пограничного слоя, можно получить новую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = A_1'(x), \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{a}{a \delta_T} \int_0^{\delta_T} \left( u \frac{\partial \Theta}{\partial y} + v \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) dy = B(x). \quad (3.102)$$

Граничные условия будут такие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=v=0, \quad \Theta=0, \quad \text{где } \Theta = \frac{T-T_w}{T_f-T_w}, \\ \text{при } y=\delta \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \text{при } y=\delta_T \quad \Theta=1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y}=0. \end{array} \right\} \quad (3.103)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{y}{\delta} = y_1, \quad \frac{\delta}{\delta_T} = \xi. \quad (3.104)$$

Интегрируя уравнения (3.101), (3.102) с граничными условиями (3.103) и с учетом (3.104), получаем распределение температуры в пограничном слое:

$$\Theta = 2y_1 - y_1^2. \quad (3.105)$$

Аналогичным образом определяем и распределение скоростей:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A \frac{y - \delta}{\nu}, \quad (3.106)$$

где вязкость  $\nu$  можно представить в таком виде:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_w} \sum_i^n b_i y^i. \quad (3.107)$$

$b$  — константа в ряду.

Выполнив интегрирование уравнения (3.106), получаем:

$$u = \frac{A}{\nu_w} \sum_{i=1}^n b_i y^i \left( \frac{y^2}{i+2} - \frac{\delta y}{i+1} \right). \quad (3.108)$$

С помощью граничных условий определяем константу:

$$A = - \frac{\nu_w U}{\Phi_0 \delta^2},$$

где

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^n \frac{b_i \xi^i}{(i+1)(i+2)}.$$

В результате находим составляющие скорости в пограничном слое:

$$u = \frac{U}{\Phi_0} \sum_{i=0}^n b_i \left[ \frac{y^{i+1}}{\xi(i+1)} - \frac{y^{i+2}}{\xi^2(i+2)} \right], \quad (3.109)$$

$$v = - \frac{U}{\Phi_0} \frac{\partial \delta_T}{\partial x} \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{y^{i+2}}{\xi(i+2)} - \frac{y^{i+3}}{\xi^2(i+3)} \right]. \quad (3.110)$$

Тогда из уравнения (3.102) можем определить толщину теплового пограничного слоя:

$$\delta_T = \sqrt{\frac{2\Phi_0 ax}{\sigma U}}, \quad (3.111)$$

где

$$\sigma = \sum_{i=0}^n b_i \left[ \frac{i!}{\xi(i+4)!} - \frac{(i+1)!}{\xi^2(i+5)!} \right]. \quad (3.112)$$

Определение всех характеристик обтекания и теплообмена пластины сводится к нахождению коэффициента  $\xi$  при помощи следующего алгебраического уравнения:

$$2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_i b_j \left[ \frac{(2i+j+6)i!(i+j+2)!}{(i+3)!(i+j+5)!} \xi_{i+j+4} \right] + \frac{v_w}{a} \sum_{i=0}^n b_i \left[ \frac{(i+1)!}{(i+5)!} - \frac{i!}{(i+4)!} \xi \right] = 0, \quad (3.113)$$

где  $i, j$  — индексы констант.

Подставляя в зависимость (3.4) значения  $\Theta$  из (3.105) вместо  $T$  и  $\delta_T$  из (3.111), находим коэффициент теплоотдачи пластины:

$$\alpha_x = \lambda \sqrt{\frac{2 \sigma U}{\Phi_0 a x}}. \quad (3.114)$$

Анализ температурных и скоростных полей, полученных в данном решении, показывает, что при охлаждении жидкости коэффициент теплоотдачи меньше, а при нагревании — больше. Вычисления, производимые при  $v = \text{const}$ , дают во всех случаях  $\alpha_{\text{нагр}} = \alpha_{\text{охл}}$ . Количество переданного тепла обратно пропорционально толщине пограничного слоя.

Г. Шу [21] предложил интегрально-итерационный метод для определения взаимодействия скоростных и температурных полей, вызванного зависимостью физических свойств от температуры. При этом в качестве первых приближений он использовал результаты точных решений Г. Блазиуса [48] и Е. Польгаузена [1] при постоянных физических свойствах.

В решении использовались уравнения движения (2.1а) и энергии (3.1) с учетом изменяемости физических констант, а также присоединялись ранее принятые безразмерные переменные (2.9), (3.8) и граничные условия (2.7), (3.7).

Безразмерные температурные функции физических свойств были приняты в зависимости от безразмерной переменной  $\eta$ :

$$\frac{\rho}{\rho_w} = x_1(\eta), \quad \frac{\mu}{\mu_w} = x_2(\eta), \quad \frac{\lambda}{\lambda_w} = x_3(\eta). \quad (3.115)$$

В результате дальнейшего решения получились зависимости для определения распределения скорости и температуры:

$$\frac{u}{U} = \frac{I(\eta)}{I(\infty)}, \quad (3.116)$$

где

$$I(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{1}{x_2} \exp\left(-\int_0^{\eta} \frac{f}{x_2} d\eta\right) d\eta \quad (3.117)$$

и

$$\Theta = \frac{K(\eta)}{K(\infty)}, \quad (3.118)$$

где

$$K(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{1}{x_2} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta} \frac{f}{x_2} d\eta\right) d\eta. \quad (3.119)$$

Из уравнений движения получено, что

$$f = 2 \int_0^{\eta} x_1 \frac{u}{U} d\eta. \quad (3.120)$$

При постоянных физических свойствах из зависимости (3.17) можно найти уже известное выражение температурного поля.

При дальнейшем решении в качестве первого приближения принимаются решения Г. Блазиуса и Е. Польгаузена для случая постоянных физических свойств. Во втором приближении определяем распределение скорости в пограничном слое по (3.117), принимая изменение физических свойств по температурному профилю, подсчитанному согласно [1]. Далее, учитывая последнее вычисление скоростного поля, находим температурное поле согласно (3.118). В такой последовательности после третьего или четвертого приближения согласно [21] можно получить достаточно точные результаты по распределению скоростей и температур.

Г. Шу с помощью этого метода, принимая во внимание только изменение вязкости от температуры, получил решение для продольно обтекаемой вязким маслом пластины. Изменение вязкости от температуры определялось степенной функцией с показателем степени, равным 3.

Как показывает анализ решения, при нагревании масла ( $T_w > T_f$ ) получаются более заполненные профили температуры и скорости (рис. 19), чем при охлаждении (рис. 20). На графиках, кроме кривых изменения скорости  $\frac{u}{U}$  и температуры  $\Theta$ , соответствующих переменной вязкости, нанесены также кривые, соответствующие постоянной вязкости, которая принята по температуре стенки или по температуре внешнего потока.

**2. Определение теплоотдачи пластины при переменной вязкости и теплопроводности жидкости.** Т. Хара [14] при теоретическом решении теплоотдачи

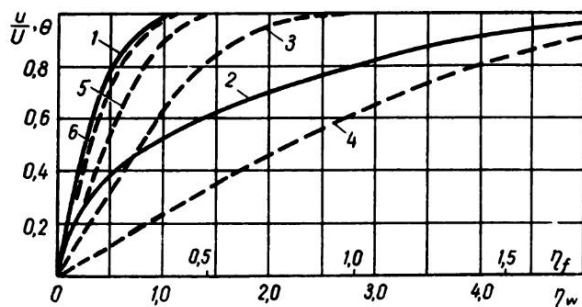


Рис. 19. Распределение скоростей и температур в пограничных слоях обогреваемой пластины ( $T_w > T_f$ ). 1, 2 — распределение температуры и скорости при переменной вязкости, 3, 4 — распределение скорости при постоянной вязкости, 5, 6 — распределение температуры при постоянной вязкости. Для кривых 3, 6 — определяющая температура  $T_w$ , а для 4, 5 —  $T_f \cdot \frac{v_w}{v_f} = \frac{1}{8}$

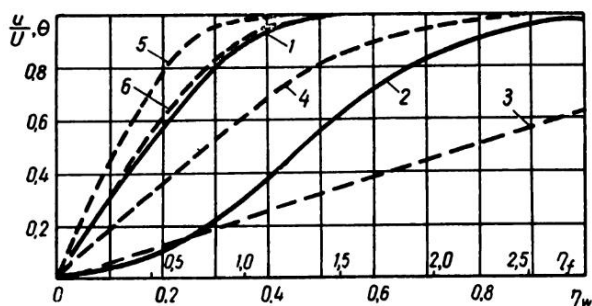


Рис. 20. Распределение скоростей и температур в пограничных слоях охлаждаемой пластины ( $T_w < T_f$ ) при переменной вязкости. Обозначения см. на рис. 19.  $\frac{v_w}{v_f} = 8$

пластины в потоке воды за переменные свойства принимал вязкость и теплопроводность. При этом в системе уравнений (2.1а), (2.3) и (3.1) вязкость и теплопроводность задавались в виде температурных степенных функций:

$$\frac{\mu}{\mu_f} = \left( \frac{T}{T_f} \right)^{m_0}, \quad (3.121)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_f} = \left( \frac{T}{T_f} \right)^{n_0}. \quad (3.122)$$

Нужно отметить, что показатели степени  $m_0$  и  $n_0$  зависят от рода жидкости и ее температуры. В данном случае для воды в интервале изменения температуры от 0 до 100°C они будут такими:  $m_0 = -6$ ,  $n_0 = 0,95 - 0,22$ . Введем обозначения:

$$\frac{T}{T_f} = \zeta, \quad \frac{T - T_f}{T_w - T_f} = \Theta. \quad (3.123)$$

С учетом уравнений (3.121), (3.122) и (3.123) исходная система уравнений пограничного слоя принимает такой вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_f \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta^{m_0} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.124)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = a_f \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta^{n_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right). \quad (3.125)$$

Далее вводятся функция тока (2.8) и новые переменные

$$\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu_f x}}, \quad (2.9)$$

$$\psi = \sqrt{\nu_f \cdot x} U \Phi(\eta). \quad (2.10)$$

Тогда

$$u = \frac{U}{2} \Phi', \quad (2.11)$$

$$v = \frac{1}{2} (\nu_f U/x)^{\frac{1}{2}} (\eta \Phi' - \Phi). \quad (2.15)$$

Учитывая это и принимая, что  $\Theta(x, y) = \Theta(\eta)$ , получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu_f x}} \Theta'(\eta). \quad (3.126)$$

Тогда из (2.15) и (3.126) найдем следующую преобразованную систему уравнений:

$$\Phi'' + m_0 \zeta^{-1} \zeta' \Phi' + \zeta^{-m_0} \Phi \Phi'' = 0, \quad (3.127)$$

$$\Theta'' + n_0 \zeta^{-1} \zeta' \Theta' + Pr \zeta^{-n_0} \Phi \Theta'' = 0. \quad (3.128)$$

Используя метод Рунге-Кутты, можно проинтегрировать систему уравнений (3.127) и (3.128). Результаты интегрирования для чисел  $Pr$ , равных 2, 3, 5, 8, 10 и 14, Т. Хара представил в таблицах.

На рис. 21 согласно данным таблиц отложены скоростные и температурные поля для чисел  $Pr$ , равных 2, 5 и 14, в зависимости от  $\eta$  и  $\epsilon$ , где

$$\epsilon = \frac{T_w - T_f}{T_f}.$$

Как видно, с увеличением  $Pr$  влияние соотношения температур на изменение температурных и скоростных полей уменьшается.

Путем несложных преобразований и использования уравнения теплопроводности (3.4) была получена зависимость для определения местного теплообмена:

$$Nu_{fx} = -\frac{(\Theta'_w)_{\eta=0}}{2} Re_{fx}^{0,5} \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{\Theta'_f}{\Theta'_w} \right)_{\eta=0} + n_0 \right] \varepsilon \right\}. \quad (3.129)$$

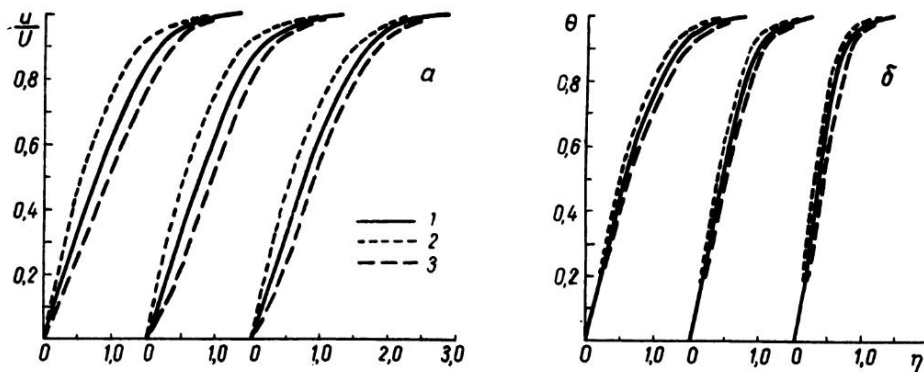


Рис. 21. Распределение скорости и температуры в пограничных слоях, соответствующее  $Pr=2, 5, 14$  при различных направлениях теплового потока. а – распределение скорости, б – распределение температуры, 1 – постоянные физические свойства ( $\varepsilon=0$ ), 2 – нагревание жидкости ( $\varepsilon=+0,1$ ), 3 – охлаждение жидкости ( $\varepsilon=-0,1$ )

В данном уравнении градиент температуры на стенке является функцией критерия  $Pr_f$ , и его можно выразить уравнением:

$$-\Theta'_w = -\left( \frac{d\Theta_w}{d\eta} \right)_{\eta=0} = f(Pr_f) = 0,676 \sqrt[3]{Pr_f}, \quad (3.130)$$

а также

$$\left( \frac{\Theta'_f}{\Theta'_w} \right)_{\eta=0} + n_0 = B(Pr_f). \quad (3.131)$$

Член в скобках в уравнении (3.129) обуславливает зависимость интенсивности теплоотдачи от изменения физических свойств жидкостей с изменением температуры и направления теплового потока. Его обозначим

$$K_1 = 1 + B(Pr_f) \frac{T_w - T_f}{T_f}.$$

М. А. Михеев [41] влияние резкого изменения значений физических свойств жидкости в прилегающем к стенке пограничном слое предложил учитывать соотношением  $Pr_f/Pr_w$  в степени 0,25.

Поскольку с температурой существенно изменяется вязкость жидкости, то влияние температурного напора и направления теплового потока часто предполагают учитывать соотношением  $\mu_f/\mu_w$ .

Обозначим

$$K_2 = (Pr_f/Pr_w)^{0,25},$$

$$K_3 = (\mu_f/\mu_w)^{0,25}.$$

В таблице 11 согласно [15] приведено сравнение предложенных параметров и соответствующего параметра, полученного при аналитическом решении.

Таблица 11

Сравнение параметров  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  для воды

$t_f$ °C	0	20	60
$\mu \cdot 10^6$	182,3	102,4	47,9
$Pr_f$	13,67	7,02	2,98
$B$	1,756	1,682	1,374

$t_w$ °C	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_1$	$K_2$	$K_3$
10	1,06	1,09	1,08	0,94	0,93	0,94	0,79	0,74	0,77
20	1,13	1,18	1,15	1,00	1,00	1,00	0,83	0,80	0,83
40	1,26	1,34	1,28	1,12	1,13	1,11	0,92	0,91	0,92
60	1,39	1,46	1,39	1,23	1,24	1,21	1,00	1,00	1,00
80	1,52	1,58	1,49	1,34	1,34	1,30	1,08	1,08	1,07
90	1,58	1,63	1,54	1,40	1,38	1,34	1,12	1,11	1,10

Видно, что приведенные способы учета температурного фактора дают практически одинаковые результаты, поскольку при незначительном изменении теплопроводности и теплоемкости

$$\frac{Pr_f}{Pr_w} \approx \frac{\mu_f}{\mu_w}.$$

Преимущество следует отдать тому из них, который включает максимальное количество переменных физических свойств и в практических расчетах определяется самым простым способом. На наш взгляд, этим качеством обладает параметр  $[Pr_f/Pr_w]^{0,25}$ , значения которого, как видно, достаточно хорошо согласуются со значениями, полученными при аналитическом решении [15]. Что касается показателя степени, то для различных жидкостей в зависимости от направления теплового потока он несколько отклоняется от 0,25. Это подтверждают аналитические расчеты теплоотдачи изотермической ( $T_w = \text{const}$ ) плас-



тины при переменных физических свойствах жидкости, выполненные в Институте физико-технических проблем энергетики АН Литовской ССР В. Макарявичюсом, П. Швенчянасом и др. [91].

В указанной работе для определения температурных полей в пограничном слое и теплоотдачи на пластине в условиях переменных физических свойств жидкости принимается следующая система уравнений:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.1)$$

При решении данной системы используются обычные граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad u=v=0, \quad T=T_w=\text{const},$$

$$\text{при } y=\infty \quad u=U, \quad T=T_f.$$

Для преобразования уравнений вводятся переменные:

$$\eta = \sqrt{U/2\nu_w} x \int_0^y (\rho/\rho_w) dy, \quad \psi = \sqrt{2U\nu_w} x \cdot \Phi(\eta), \quad \Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_f}. \quad (3.132)$$

Выполнив необходимые операции аналогично случаю обтекания и теплообмена пластины при постоянных физических свойствах (см. раздел 3.2), получим дифференциальные уравнения

$$(\rho\mu/\rho_w\mu_w) \Phi'' + [(\rho\mu/\rho_w\mu_w)' + \Phi] \Phi' = 0, \quad (3.133)$$

$$(c_{pw}/c_p)(\rho\lambda/\rho_w\lambda_w) \Theta'' + [(c_{pw}/c_p)(\rho\lambda/\rho_w\lambda_w)' + Pr_w \cdot \Phi] \Theta' = 0 \quad (3.134)$$

со следующими граничными условиями:

$$\text{при } \eta=0 \quad \Phi = \Phi' = 0, \quad \Theta = 0,$$

$$\text{при } \eta=\infty \quad \Phi' = 1, \quad \Theta = 1.$$

Данная система является автомодельной. Для решения ее численным методом на машине БЭСМ-4 В. Макарявичюс, П. Швенчянас и др. использовали дополнительные условия в виде степенных зависимостей между физическими свойствами жидкостей и температурой:

$$\mu/\mu_w = (T/T_w)^{n_\mu},$$

$$\lambda/\lambda_w = (T/T_w)^{n_\lambda},$$

$$c_p/c_{pw} = (T/T_w)^{n_c},$$

$$\rho/\rho_w = (T/T_w)^{n_\rho}.$$

Теплофизические свойства жидкостей в зависимости от температуры меняются в широких пределах. Поэтому показатели степенных зависимостей теплофизических свойств жидкостей от температуры принимались на основе анализа свойств воды, глицерина и трансформаторного масла и при расчетах варьировались в следующих пределах:

$$n_\rho + n_\mu \quad \text{от } -4,0 \quad \text{до } -16,0,$$

$$n_\rho + n_\lambda \quad \text{от } 1,0 \quad \text{до } -1,0,$$

$$n_c \quad \text{от } 0,0 \quad \text{до } 1,0.$$

В результате расчетов проанализировано влияние изменения плотности, теплопроводности, теплоемкости и вязкости на структуру профилей температуры и скоростей в интервале соотношения температур  $T_f/T_w$  от 0,4 до 1,6 и чисел  $Pr_w$  от 1 до 500.

Замечено, что влияние изменения физических свойств в пограничном слое зависит от направления теплового потока и в большей степени проявляется при  $T_f < T_w$ .

Полученные результаты расчетов теплоотдачи пластины при переменных физических свойствах жидкости можно обобщить зависимостью [91]:

$$\begin{aligned} Nu_{fx} = & 0,33 Re_{fx}^{0,50} Pr_f^{0,33} [(Pr_f/Pr_w)^{0,17+p} \cdot (\rho_f \lambda_f / \rho_w \cdot \lambda_w)^{0,32} a^{-0,50+p} \times \\ & \times (c_{pf}/c_{pw})^{0,32} a^{-0,50-p}], \end{aligned} \quad (3.135)$$

где показатели  $p$  и  $a$  зависят от направления теплового потока и числа  $Pr_w$ .

В случае  $T_f < T_w$   $a=0,75$ , а значения показателя  $p$  меняются в зависимости от числа  $Pr_w$ : при  $Pr_w=1$   $p=0,05$ , при  $Pr_w=10$   $p=0,08$ , при  $Pr_w=1000$   $p=0,11$  и при  $Pr_w=500$   $p=0,13$ .

В случае  $T_f > T_w$   $a=1,0$  и  $p=0$ .

Полученная расчетная зависимость (3.135) в основном совпадает с другими зависимостями, полученными теоретическим путем. Однако вместе с тем она включает дополнительный член, учитывающий зависимость интенсивности теплоотдачи от изменения физических свойств жидкости с изменением температурного напора и направления теплового потока. Его обозначим

$$K_4 = (Pr_f/Pr_w)^{0,17+p} (\rho_f \lambda_f / \rho_w \lambda_w)^{0,32} a^{-0,50+p} (c_{pf}/c_{pw})^{0,32} a^{-0,50-p}.$$

Численные значения параметра  $K_4$ , определенные по этому уравнению, хорошо согласуются с результатами теоретического исследования [92].

Сравнение учета влияния температурного напора и влияния направления теплового потока на теплоотдачу с помощью параметров  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_4$  представлено на рис. 22.

Как видно из рис. 22, изменение параметра  $K_1$  при нагревании и охлаждении воды соответствует соотношению  $Pr_f/Pr_w$  в степени 0,20.

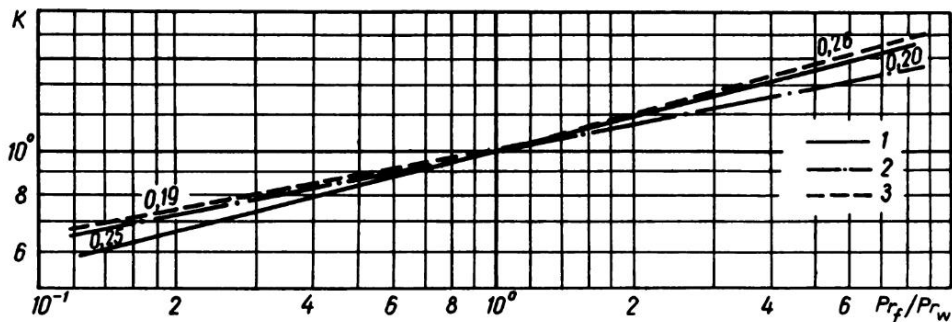


Рис. 22. Сопоставление методов учета влияния температурного напора и направления теплового потока на теплоотдачу пластины. 1 — исследование [16],  $K_4$ , 2 — исследование [14],  $K_1$ , 3 — результаты настоящего исследования  $K_4$

Параметр  $K_4$ , рассчитанный как для воды, так и для трансформаторного масла в случае нагревания и охлаждения жидкости, дает различные показатели степени для соотношения  $Pr_f/Pr_w$ . При нагревании показатель степени равен 0,26, а при охлаждении — 0,19. Этими показателями следует пользоваться при более точных расчетах. Однако, исходя из простоты расчета, для большинства случаев на практике при нагревании и при охлаждении с достаточной точностью можно принимать показатель степени 0,25.

### 3.7. Скоростные и температурные поля на пластине при переменных физических свойствах жидкости

Решение этой задачи осуществляется аналогично решению гидродинамической задачи обтекания пластины при постоянном расходе жидкости по сечению течения [61]. Основной целью исследования является определение температурного поля в пограничном слое, а также неразрывно связанного с ним скоростного поля. Сущность решения заключается в том, чтобы с помощью нижеприведенных экспоненциальных рядов сомкнуть степенное

разложение в пограничном слое с асимптотическим. Здесь приводится метод решения обтекания и теплообмена пластины при переменных вязкости и теплопроводности. Решение основывается на полных уравнениях Навье—Стокса:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\nu(\Theta)}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\nu(\Theta)}{U} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (3.136)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\nu(\Theta)}{U} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\nu(\Theta)}{U} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.138)$$

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{a(\Theta)}{u} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{a(\Theta)}{u} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] + \frac{u}{c_p} \frac{\nu(\Theta)}{(T_w - T_f)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.139)$$

К системе присоединяются граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad u=v, \quad \Theta=0, \quad \text{где } \Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_f}, \quad (3.140)$$

$$\text{при } y=\infty \quad u=U, \quad p=p_\infty, \quad (3.141)$$

$$\text{при } y=\infty \quad v=0, \quad \int_0^\infty (1-u) dy = 0 \quad (3.142)$$

и интегральные соотношения:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{\nu_w} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(1-u) dy, \quad (3.143)$$

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{a_w} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(1-\Theta) dy. \quad (3.144)$$

В этом решении используется граничное условие (3.142), означающее постоянство расхода жидкости через каждое сечение, перпендикулярное

направлению течения. Указанное граничное условие в классической теории пограничного слоя не применяется.

Вязкость задается интерполяционным полиномом:

$$\nu(\Theta) = \nu_w - R_1 y_0 + R_2 y_0^2 + R_3 y_0^3 \dots, \quad (3.145)$$

где  $y_0$  – произвольный параметр, а  $\Theta = f(y_0)$ . Тогда получаем:

$$R_k = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k [\nu(\Theta [y])] }{\partial y^k}. \quad (3.146)$$

Из уравнения (3.146) видно, что для определения коэффициентов  $R_k$  необходимо вычислить производные вязкости в точке  $T_w$ .

Теплопроводность принимается как линейная функция температуры:

$$\lambda(\Theta) = \lambda_w - (\lambda_w - \lambda_f) \Theta. \quad (3.147)$$

Решение задачи Коши для системы (3.136)–(3.139) в узкой пристеночной полосе может быть выражено степенными рядами:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_k(x) y^k, \quad (3.148)$$

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} D_k(x) y^k. \quad (3.149)$$

С помощью уравнений (3.138), (3.143) и (3.148) определяется вертикальная составляющая скорости:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{k+1} B_k^i(x) y^k. \quad (3.150)$$

После подстановки зависимостей (3.145)–(3.150) в уравнения (3.136), (3.137) и (3.139) и приведения подобных членов уравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ . Получаем бесконечные рекуррентные системы уравнений для определения коэффициентов  $B_k(x)$  и  $D_k(x)$ .

В обобщенном виде они выражаются так:

$$B_{k+s} = \frac{U}{\nu_w (k+1)(k+2)(k+3)} \left\{ \sum_{i=4}^{k+1} \left( \frac{1}{i-2} B_{i-3}^i B_{k-i+2}^{\prime\prime} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{k-i+3} B_{i-3}^i B_{k-i+2}^{\prime\prime} \right) + \sum_{i=3}^{k+1} \frac{(k-i+2)(k-i+3)}{i-1} B_{i-2}^i B_{k-i+s} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=2}^{k+1} (k-i+2) B_{i-1} B'_{k-i+2} - (k+1)(k+2) \left[ \sum_{i=0}^{k+1} (i+1) B_{i+1} R_{k-i+3} - \right. \\
& - \left. \sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i+1} B_i R_{k-i+1} \right] - 4(k+1) \sum_{i=1}^{k+1} (B'_i R'_{k-i+1} + B''_i R_{k-i+1}) + \\
& + \sum_{i=1}^{k+1} (i) B''_i R_{k-i+1} - \sum_{i=3}^{k+1} \frac{1}{i-1} B_{i-2}^{IV} R_{k-i+1} + 2 \left( \sum_{i=1}^{k+1} (i) B'_i R'_{k-i+1} - \right. \\
& - \left. \sum_{i=3}^{k+1} \frac{1}{i-1} B''_{i-2} R'_{k-i+1} \right) + \sum_{i=1}^{k+1} (i) B_i R''_{k-i+1} - \\
& - \left. \sum_{i=3}^{k+1} \frac{1}{i-1} B''_{i-2} R''_{k-i+1} \right\}; \quad (3.151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k+2} = & \frac{1}{\lambda_w (k+1)(k+2)} \left\{ \sum_{i=2}^k Pr_w Re_1 \left( \frac{k-i+1}{i} B'_{i-1} D_{k-i+1} - B_i D'_{k-1} \right) + \right. \\
& + (\lambda_j - \lambda_w) \left[ \sum_{i=0}^k (D'_i D'_{k-i} + D_i D''_{k-i}) + (k+1) \sum_{i=0}^k (i+1) D_{i+1} D_{k-i+1} \right] + \\
& + \frac{\rho_w U^3}{T_j - T_w} \left[ \sum_{i=0}^k \left( \sum_{j=0}^i (j+1)(i-j+1) B_{j+1} B_{i-j+1} \right) R_{k-i} + \right. \\
& + \sum_{i=4}^k \left( \sum_{j=2}^{i-2} \frac{1}{(j+2)(i-j-2)} B_{j+1} B_{i-j-3} \right) R_{k-i} + \\
& + 2 \sum_{i=2}^k \left( \sum_{j=0}^{i-2} \frac{j+3}{i-1} B_{j+3} B''_{i-j-1} \right) R_{k-i} - \\
& \left. - 4 \sum_{i=2}^k \left( \sum_{j=1}^{i-1} B_{j+1} B_{i-j-1} \right) R_{k-i} \right\}, \quad (3.152)
\end{aligned}$$

где  $k=0, 1, 2, \dots$ ,  $Re_1 = U/\nu$ .

При  $k=0$  получаем:

$$B_3 = -\frac{1}{3\nu_w} (B_1 R_2 + B_1' \nu_w), \quad (3.153)$$

$$D_3 = -\frac{1}{2\lambda_w} \left( D_1^2 \lambda + \rho \frac{U^2}{T_w - T_f} \nu_w B_1^2 \right). \quad (3.154)$$

Коэффициенты  $R_k$  определяются через  $D_k$ :

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{T_w - T_f}{U} \frac{\partial \nu}{\partial \Theta} D_1, \\ R_2 &= \frac{1}{2U} \left[ (T_w - T_f)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \Theta^2} D_1^2 + 2(T_w - T_f) \frac{\partial \nu}{\partial \Theta} D_2 \right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.155)$$

В нулевом приближении для определения значений  $B_1$  и  $D_1$  используются уравнения:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{Re} \cdot \frac{1}{x} = B_1, \quad (3.156)$$

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = Nu_x \frac{1}{x} = D_1. \quad (3.157)$$

Степенные ряды (3.148), (3.149) существуют и правильно отражают поля скоростей и температур лишь при малых значениях  $y$ . Продолжение этих рядов для больших значений  $y$  осуществляется экспоненциальными рядами:

$$u = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) y^k \exp(-y_k(x)y), \quad (3.158)$$

$$\Theta = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) y^k \exp(-d_k(x)y), \quad (3.159)$$

где  $y_k(x) \geq 0$ ,  $d_k(x) \geq 0$  при  $x \geq 0$ .

Для равенства степенных рядов (3.148), (3.149) и экспоненциальных рядов (3.158), (3.159) при малых  $y$  необходимо, чтобы коэффициенты удовлетворяли соотношениям:

$$B_k(x) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{A_n^{(x)}}{(k-n)!} \varphi_n^{(k-n)}(x), \quad (3.160)$$

$$D_k(x) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{c_n(x)}{(k-n)!} d_n^{(k-n)}(x). \quad (3.161)$$

Подставив (3.140) в (3.158) и (3.159), определяем, что  $A_0=1$  и  $c_0=1$ . Учитывая (3.142), получаем условие для определения  $\varphi_k(x)$  и  $A_k(x)$ . После интегрирования будем иметь:

$$\frac{1}{\varphi_0} + \frac{A_1}{\varphi_1^2} + \dots + n! \frac{A_n}{\varphi_n^{n+1}} = 0. \quad (3.162)$$

Вычислив ряды (3.158) и (3.159), получаем первое приближение решения. Подставив полученный результат в (3.143) и (3.144), можем определить новые граничные условия второго приближения для задачи Коши. Процесс решения второго приближения осуществляется методом приближения, аналогичным первому. Только в данном случае вместо дополнительных граничных условий (3.156), (3.157) используются вновь полученные из (3.143), (3.144) путем интегрирования с учетом (3.158) и (3.159) граничные условия:

$$B_1 = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{v_w} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k! \sum_{i=0}^k \frac{A_i A_{k-i}}{(\varphi_i + \varphi_{k-i})^{k+1}} \right), \quad (3.163)$$

$$D_1 = \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{a_w} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=1}^k \frac{A_i c_{k-i}}{(\varphi_i + d_{k-i})^{k+1}} \right). \quad (3.164)$$

Итерационный процесс расчета после определения (3.158) и (3.159) можно продолжать до необходимой и заданной точности. Следует отметить, что в первом приближении изменение физических свойств не учитывается.

В целом изложенный метод решения позволяет определить скоростные и температурные поля при обтекании пластины с учетом изменения вязкости и теплопроводности от температуры. Температурные зависимости физических свойств могут задаваться численно или аналитически.

По изложенному методу на БЭСМ-4 был проведен численный расчет температурных полей на пластине для случая, когда теплопровод-

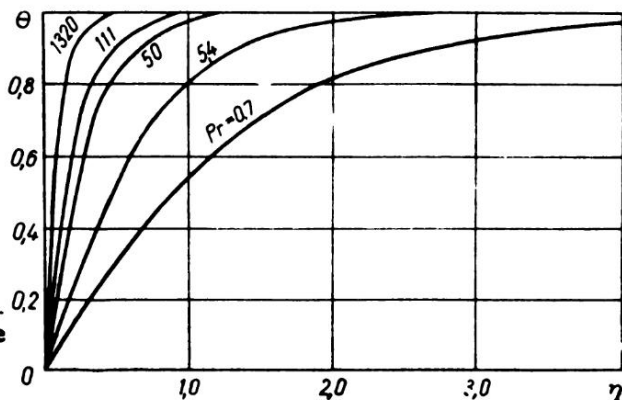


Рис. 23. Распределение температуры в пограничном слое в случае постоянного расхода жидкости



ность жидкости зависит от температуры, а вязкость — величина постоянная. Некоторые результаты этих расчетов представлены на рис. 23.

В данном расчете температурная зависимость теплопроводности аппроксимировалась линейной функцией температуры. Для рассматри-

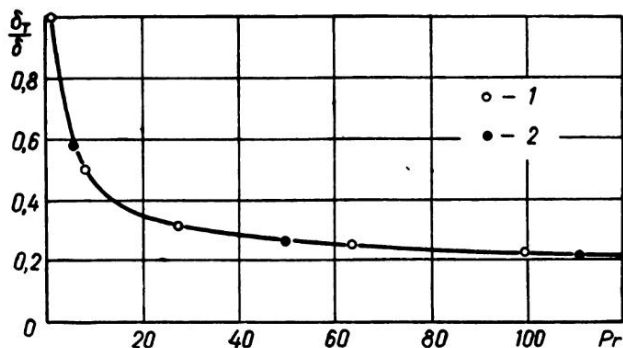


Рис. 24. Зависимость соотношения толщин пограничных слоев от числа  $Pr$ . 1 — решения Блазиуса Польшаузена, 2 — данный расчет

ваемых жидкостей в исследованном интервале температур (см. таблицы 8—11 приложений) такая аппроксимация является вполне оправданной.

Из графиков видно, что общие тенденции изменения температурных полей остаются такими же (см. рис. 9), как и для результатов, полученных на основе решения упрощенных уравнений пограничного слоя (2.5), (2.6), (3.6). С другой стороны, анализ температурных кривых (рис. 23) показывает, что толщина теплового пограничного слоя в случае использования полных уравнений Навье—Стокса при совместном решении их с уравнениями энергии получается больше, а температурные профили — более плавные и более асимптотические. Это объясняется определенными выше особенностями изменения скоростных полей (см. гл. 2, рис. 6).

На рис. 24 приведена закономерность изменения соотношения толщин температурного и динамического пограничных слоев в зависимости от числа  $Pr$ .

Сопоставляется зависимость, полученная в классических решениях Блазиуса—Польшаузена, с зависимостью, полученной в данном исследовании. За толщину динамического пограничного слоя нами принималась та толщина, которая достигалась при максимальном соотношении скоростей  $\frac{u}{U}$  (см. гл. 2, рис. 6). Толщины теплового пограничного слоя определялись по рис. 23.

Из приведенного сопоставления отчетливо видно достаточно точное совпадение закономерностей изменения соотношения толщин пограничного слоя, несмотря на то, что в абсолютных величинах данные толщины различны.

# 4 Теоретический расчет теплоотдачи в начальном участке параллельных пластин

В предыдущих главах рассматривались вопросы гидродинамики и теплообмена пластины в неограниченном потоке. Указанные процессы на входе в канал параллельных пластин совершенно аналогичны, но с удалением от входа они приобретают новые особенности. Возникают градиенты скорости и давления, отсутствующие при обтекании пластины неограниченным потоком.

Сам по себе этот вопрос представляет интерес, поскольку подобный процесс теплообмена часто встречается в различных теплообменных устройствах. В таких случаях из-за небольшой длины каналов течение не успевает стабилизироваться, т. е. процесс протекает при одновременном развитии скоростных и температурных полей. Иначе говоря, процессы осуществляются в начальном гидродинамическом участке.

Для уяснения особенностей начального гидродинамического участка представим, что в какой-то плоский канал параллельных пластин из большого резервуара начинает поступать жидкость. В таких условиях на входе в канал образуется вполне равномерный по всему поперечному сечению профиль скорости. Но ввиду действия сил вязкости на стенках канала будут формироваться гидродинамические пограничные слои, т. е. слои заторможенной жидкости. За пределами пограничных слоев в канале существует потенциальный поток, свободный от тормозящего действия сил вязкости. Поэтому в пределах потенциального потока скорость в заданном сечении не претерпевает изменений и остается равномерной. С удалением от входа в канал толщина пограничных слоев увеличивается. Таким образом, ввиду постоянства расхода жидкости через любое сечение канала скорость потенциального потока должна увеличиваться по направлению течения (рис. 25). Процесс

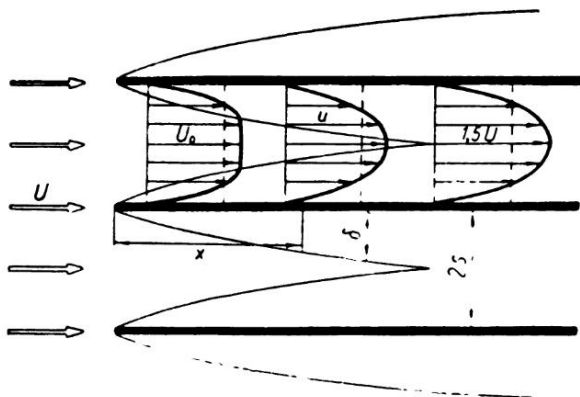


Рис. 25. Схема течения жидкости в начальном участке параллельных пластин

увеличения будет продолжаться до тех пор, пока пограничные слои не сомкнутся между собой или пока течение не стабилизируется.

Увеличение скорости потенциального потока неизбежно влияет на развитие пограничного слоя, который формируется под действием ускоренного внешнего течения. Такое развитие гидродинамики между параллельными пластинами соответствующим образом влияет и на теплоотдачу каждой пластины. Поэтому рассмотрение теплоотдачи параллельных пластин начнем с вопросов расчета движения жидкости в начальном участке канала из параллельных пластин.

#### 4.1. Движение жидкости в начальном участке параллельных пластин

При изучении течения жидкости в начальном участке чаще всего обращаются к теории пограничного слоя, используя точные и приближенные методы решения. Существуют и другие методы, не требующие введения модели пограничного слоя. В данном разделе рассмотрим распределение скорости по сечению канала, изменение скорости потенциального потока вдоль канала, гидравлическое сопротивление трения, а также длину начального гидродинамического участка.

Для точного решения задачи течения жидкости используются уравнения пограничного слоя (2.5), (2.6) без учета влияния зависимости физических свойств от температуры. Эти уравнения приводятся в безразмерную форму с помощью следующих величин [63]:

$$\left. \begin{aligned} Re_s &= \frac{Us}{\nu}, & \bar{U} &= \frac{u}{U}, & \bar{U}_0 &= \frac{U_0}{U}, & \bar{V} &= \frac{v}{U} Re_s, \\ X &= \frac{x}{s Re_s}, & Y &= \frac{y}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Тогда система уравнений (2.5), (2.6) примет следующий вид:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} = \bar{U}_0 \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y^2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0. \quad (4.3)$$

Если система координат будет расположена на стенке канала (рис. 25), то для этих уравнений граничные условия будут такие:

$$\begin{aligned} X > 0, \quad Y = 0, \quad Y = 2, \quad \bar{U} = \bar{V} = 0, \\ X = 0, \quad 0 \leq Y \leq 2, \quad \bar{U} = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Эту систему уравнений решаем принятыми в теории пограничного слоя методами. Для решения в уравнение вводятся функции тока:

$$\frac{\partial \psi(X, Y)}{\partial Y} = \bar{U}(X, Y), \quad \frac{\partial \psi(X, Y)}{\partial X} = -\bar{V}(X, Y), \quad (4.5)$$

которые можно представить в виде ряда:

$$\psi(X, \eta) = f_0(\eta) X^{\frac{1}{2}} + a_1 f_1(\eta) X + a_2 f_2(\eta) X^{\frac{3}{2}} \dots, \quad (4.6)$$

где  $\eta = \frac{X}{2x} = \frac{y \sqrt{Re}}{2x}$ ,  $f_0, f_1, \dots$  — функции скоростного профиля;  $a_1, a_2$  — константы.

В результате получается зависимость для определения скорости вне пограничного слоя:

$$U_0 = 1 + a_1 X^{\frac{1}{2}} + a_2 X + a_3 X^{\frac{3}{2}} \dots \quad (4.7)$$

Неизвестные константы в этих уравнениях определяются решением уравнения (4.2), которое с помощью (4.6), (4.7) превращается в ряд простых дифференциальных уравнений. Для определения скорости потенциального потока на оси канала из уравнения (4.7) необходимо знать константы  $a_1, a_2, \dots$ . Они определены и представлены в работе [63]:  $a_1 = 1,721$ ,  $a_2 = -2,24$ ,  $a_3 = 19,82$ ,  $a_4 = -208,4$ .

Зависимость (4.7) действительна только для малых значений  $X \leq 8 \cdot 10^{-3}$  начального участка, что соответствует  $U_0 = 1,15 \cdot U$ .

Г. Шлихтинг [68], используя точный метод решения, получил распределение скоростей в начальном участке плоского канала. Это решение осуществлялось по следующей схеме. Начальный участок разделялся на две зоны. В первой зоне, находящейся у самого входа в канал, где  $\delta/s \ll 1$ , можно использовать модель развития пограничного слоя на пластине со свойственными ему особенностями и допущениями.

В процессе решения использовались те же самые, что и для пластины, математические методы решения уравнений движения.

Вторая зона полностью примыкает к развитому течению в канале, обладающему параболическим профилем скорости. Распределение скоростей, являющееся решением как в первой, так и во второй зонах, выражается рядами. Из этих рядов, представляющих частные для отдельных зон решения, путем их смыкания в некоторой общей точке при общих граничных условиях строится общее решение для всего участка. Полученное этим методом распределение скоростей для всего начального участка представлено на

рис. 26. При  $X = \frac{x}{s \cdot Re_s} \geq 0,16$  профиль скорости приобретает параболический характер, соответствующий установившемуся ламинарному течению.

Осуществленное Г. Шлихтингом решение для начального участка канала, т. е. для малых значений  $X$ , требует коррективов, так как в этой области

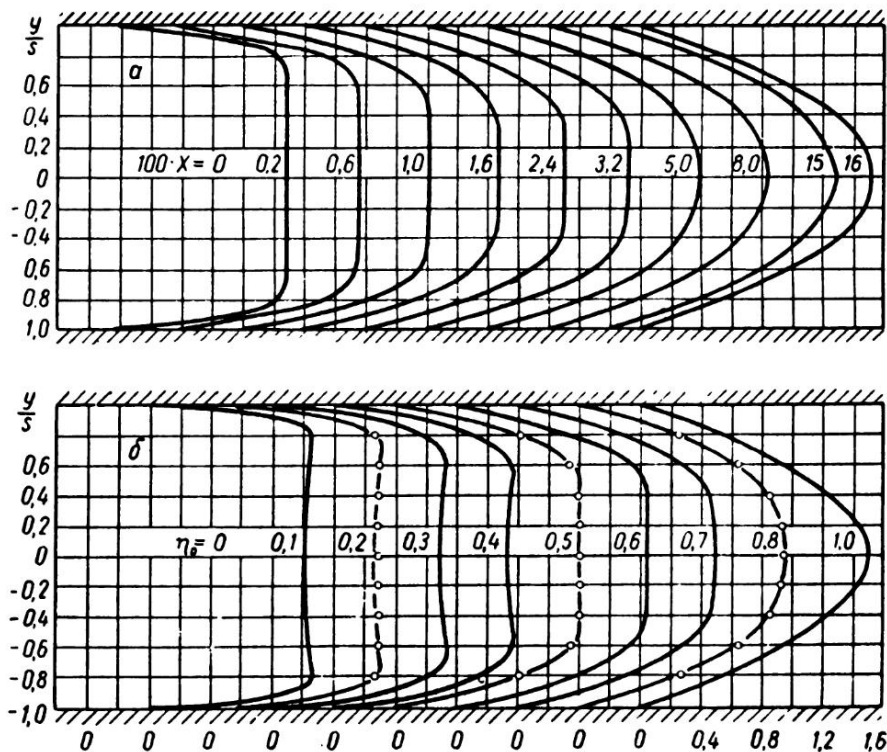


Рис. 26. Распределение скоростей в начальном участке параллельных пластин. а — по работе [68], б — по работе [69], точки — по работе [68].  $\eta_0 = 1 - (1 - cx)^{-1}$  где  $c$  — константа,  $x = X/s$

нельзя применить уравнения пограничного слоя ввиду того, что  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Значительным становится и градиент поперек канала  $dp/dy \neq 0$ . Поэтому возникает необходимость совместного решения уравнений движения для продольной и поперечной составляющих скорости, так как уравнением для последней составляющей пренебречь нельзя. Уточнение решения Г. Шлихтинга с учетом указанных выше особенностей проведено в работе [69], где методом конечных разностей проинтегрированы полные уравнения Навье—Стокса. Полученные

результаты распределения скоростей отличаются от результатов, полученных Г. Шлихтингом только для участка, расположенного в непосредственной близости от входа в канал (см. рис. 26). Из графика видно, что профили скорости претерпевают незначительную деформацию.

Вышеупомянутые точные методы расчета течения в начальном участке канала из параллельных пластин сложны и трудоемки. Поэтому следует отдать предпочтение приближенным методам расчета, которые основываются на уравнении импульса, представленном в виде:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (U_0 - u) u dy + \rho \frac{du}{dx} \int_0^{\delta} (U_0 - u) dy = \tau_w. \quad (4.9)$$

Толщину вытеснения выражаем уравнением

$$\delta^* = \frac{1}{U_0} \int_0^s (U_0 - u) dy. \quad (4.10)$$

Из уравнения неразрывности потока получаем:

$$\int_0^s u dy = Us. \quad (4.11)$$

Подставляя значения (4.11) в уравнение (4.10), согласно [65] получаем распределение скорости потенциального потока в начальном участке, которое выражается зависимостью:

$$U_0 = U \frac{s}{s - \delta^*} = U \frac{1}{1 - \frac{\delta^*}{s}} = U \left[ 1 + \frac{\delta^*}{s} + \left( \frac{\delta^*}{s} \right)^2 + \dots \right]. \quad (4.12)$$

Принимаем, что распределение скорости в пограничном слое соответствует параболе четвертой степени:

$$U = ay + by^2 + cy^3 + dy^4. \quad (4.13)$$

Константы этого уравнения определяются аналогично изложенной в главе 2 методике при заданных граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \quad u=0, \quad \frac{d^3 u}{dy^3} &= 0, \\ \text{при } y=\delta \quad u=U_0, \quad \frac{du}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тогда уравнение (4.13) принимает вид:

$$\frac{u}{U_0} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4. \quad (4.15)$$

После подстановки (4.15) в зависимость (4.9) при  $\delta = f(x)$  получаем новое дифференциальное уравнение:

$$\frac{113}{210} \delta \frac{dU_0}{dx} + \frac{5}{42} U_0 \frac{d\delta}{dx} = \nu \frac{2}{\delta}. \quad (4.16)$$

По теории пограничного слоя путем подстановки (4.15) в уравнение (4.10) получаем соотношение толщины пограничного слоя с толщиной вытеснения:

$$\delta^* = 0,3 \delta. \quad (4.17)$$

Тогда скорость потенциального потока с помощью уравнения (4.12) принимает вид

$$U_0 = U \left[ 1 + 0,3 \frac{\delta}{s} + \left(0,3 \frac{\delta}{s}\right)^2 \dots \right]. \quad (4.18)$$

Ограничившись двумя членами этого ряда и подставив их в уравнение (4.16), после некоторых преобразований получаем зависимость безразмерной толщины пограничного слоя:

$$\left(\frac{\delta}{s}\right)^3 + 0,9 \left(\frac{\delta}{s}\right)^2 = 30,4 \frac{\nu x}{U s^3}. \quad (4.19)$$

После введения новой безразмерной длины, характерной для начального участка

$$X = \frac{\nu x}{U s^3} = \frac{x}{s} \frac{1}{Re_s}, \quad (4.1)$$

уравнение (4.19) может быть решено относительно  $X$ . Тогда решение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{s} = & \sqrt[3]{15,22 X - 0,027 + \sqrt{(15,22 X - 0,027)^2 - 729 \cdot 10^{-6}}} + \\ & + \sqrt[3]{15,22 X - 0,027 - \sqrt{(15,22 X - 0,027)^2 - 729 \cdot 10^{-6}}} - 0,3. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Изменение безразмерной толщины пограничного слоя согласно уравнению (4.19) в зависимости от параметра  $X$  представлено на рис. 27. Для сопоставления нанесены и данные изменения толщины пограничного слоя для пласти-

ны в зависимости от  $\frac{vx}{U}$ . При сопоставлении явно видно, что пограничный слой на стенках канала из параллельных пластин при больших значениях  $X$  значительно меньше пограничного слоя, образовавшегося на пластине. Причиной „стирания“ пограничного слоя нужно считать существование гра-

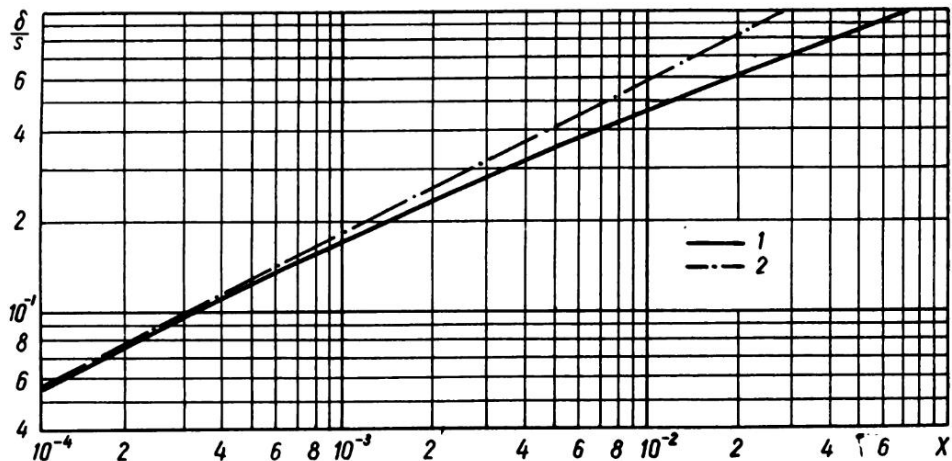


Рис. 27. Изменение толщины пограничного слоя. 1 — в начальном участке параллельных пластин, 2 — на одиночной пластине

диента давления в начальном участке и увеличение скорости потенциального потока ввиду сохранения неразрывности течения.

Используя уравнения (4.20) и (4.18), определяем скорость потенциального течения в начальном участке в зависимости от параметра  $X$ . Подстановка значения  $U_0$  с учетом уравнения (4.20) в зависимость (4.15) дает распределение скоростей в любом поперечном сечении начального гидродинамического участка из параллельных пластин. На рис. 28 представлено сопоставление распределения скорости в канале, полученного точными методами [68] с ре-

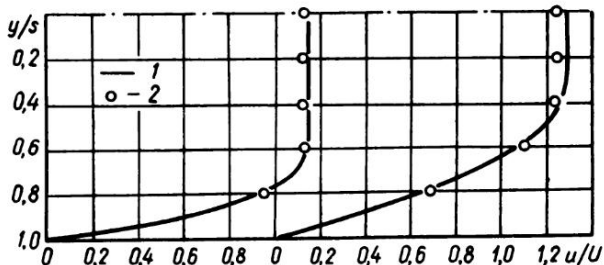


Рис. 28. Сопоставление распределения скоростей между параллельными пластинами при  $X=0,6 \cdot 10^{-2}$ ;  $2,4 \cdot 10^{-2}$ . 1 — по работе [68], 2 — по работе [65]



зультатом приближенного решения согласно уравнению (4.15). Достаточно точное совпадение данных позволяет заключить, что скоростное поле в начальном участке канала из параллельных пластин можно успешно определить с помощью сравнительно несложных расчетов уравнений (4.20), (4.18) и (4.15).

Гидравлическое сопротивление или падение давления в начальном участке плоского канала является важной гидродинамической характеристикой. Падение давления в начальном участке значительно больше падения давления, соответствующего участку стабилизированного течения. Это объясняется значительным изменением количества движения и трением протекающей жидкости со стенкой. Падение давления определяется различными методами, при этом очень часто для его нахождения используется распределение скоростей в начальном участке.

Падение давления для всей длины начального участка можно определить довольно просто с помощью уравнения Бернулли:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (U_0^2 - U^2), \quad (4.21)$$

где  $U_0$  — скорость на оси канала при установившемся течении,  $x=L$ .

Таким образом, зная скорость набегающего потока, по уравнению (4.21), представленному в виде:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^2}{2}} = U_0^2 - 1. \quad (4.22)$$

подсчитываем падение давления.

Учитывая (4.7), для определения потери давления в начальном участке можно использовать зависимость:

$$-\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^2}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^{\frac{k}{2}}, \quad (4.23)$$

где  $a_1 = -13,766$ ,  $a_2 = -24,379$ ,  $a_3 = 2043,5$ ,  $a_4 = -87952$ . Задача усложняется в тех случаях, когда падение давления необходимо определить не на всей длине начального участка, а только на некоторой его части. В данном случае расчет можно осуществить по общеизвестным методам, предложенным Г. С. Таргом [17], Л. Лейбензоном [93] и Е. Спэрроу [67].

На наш взгляд, следует обратить также внимание на метод расчета [94], который не требует определения полей скоростей во всем начальном участке. При расчете по данному методу вводится параметр, учитывающий дополнительные потери давления, обусловленные влиянием в начальном участке. Для определения этого параметра достаточно знать лишь профиль скорости полностью стабилизированного течения.

Падение давления в начальном участке канала может быть определено с помощью зависимости

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^3}{2}} = f \frac{x}{d} + k_p, \quad (4.24)$$

где  $k_p$  — параметр, учитывающий дополнительные потери давления в начальном участке,  $f$  — коэффициент сопротивления трения полностью стабилизированного течения. Относительно физической сущности параметра давления  $k_p$  можно сказать, что он включает дополнительное падение давления, уходящее на процесс формирования профиля скорости стабилизированного течения, а также потери энергии из-за существующих в начальном участке более высоких касательных напряжений на стенках каналов. Когда процесс стабилизации в канале заканчивается, величина  $k_p$  остается постоянной и показывает, на сколько увеличиваются потери давления в начальном участке по сравнению с потерями в случае стабилизированного течения.

Параметр  $k_p$  для каналов различной конфигурации выражается обобщенным уравнением:

$$k_p = \frac{2}{F} \int \left[ \left( \frac{U_0}{U} \right)^3 - \left( \frac{U_0}{U} \right)^2 \right] dF, \quad (4.25)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения канала. Таким образом, для определения потерь давления необходимо знать  $U_0$ .

Параметр  $k_p$  и другие вспомогательные величины в зависимости от соотношения высоты  $2s$  и ширины  $s_1$  плоского канала согласно [94] приведены в табл. 12. Как видно из таблицы, для начального участка течения между параллельными пластинами  $2s/s_1=0$ , параметр  $k_p=0,687$ .

Таблица 12

Значения основных величин в зависимостях (4.24), (4.30)

$2s/s_1$	$\frac{1}{F} \int \left( \frac{U_0}{U} \right)^2 dF$	$\frac{1}{F} \int \left( \frac{U_0}{U} \right)^3 dF$	$k_p$	$\frac{U_0}{U}$	$A$	$\frac{L}{dRe_d}$
0	1,200	1,543	0,687	1,500	96,00	0,0059
1/20	1,218	1,599	0,761	1,549	89,91	0,0071
1/10	1,237	1,656	0,839	1,601	84,68	0,0086
1/8	1,245	1,685	0,879	1,628	82,34	0,0094
1/6	1,260	1,733	0,945	1,676	78,81	0,0110
1/4	1,288	1,826	1,076	1,774	72,93	0,0147
2/5	1,328	1,969	1,282	1,024	65,47	0,0211
1/2	1,347	2,039	1,383	1,992	62,19	0,0255
3/4	1,373	2,133	1,520	2,077	57,89	0,0310
1	1,379	2,154	1,552	2,096	56,91	0,0328

Согласно закону Пуазейля [24] для установившегося ламинарного течения в каналах коэффициент сопротивления трения

$$f = \frac{A}{Re_d}, \quad (4.26)$$

где постоянная  $A$  зависит от формы сечения канала. Ее значения также приведены в табл. 12.

Немаловажной гидродинамической характеристикой является длина начального участка. Рассмотрим метод определения длины этого участка [95], который основывается на ранее использованной формуле (4.24). По этой формуле рассчитывается падение давления на протяжении всего начального участка и уравнение (4.24) приобретает вид:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U}{2}} = f \frac{L}{d} + k_p. \quad (4.27)$$

С другой стороны, падение давления на начальном участке можем представить уравнением:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (U_0^2 - U^2). \quad (4.28)$$

В результате сравнения правых частей уравнений (4.27) и (4.28) получаем зависимость для определения длины начального участка:

$$\frac{L}{d} = \left[ \left( \frac{U_0}{U} \right)^2 - 1 - k_p \right] / f. \quad (4.29)$$

Принимая во внимание уравнение (4.26), окончательно находим длину начального участка:

$$\frac{L}{d Re_d} = \left[ \left( \frac{U_0}{U} \right)^2 - 1 - k_p \right] / A. \quad (4.30)$$

Все необходимые значения для расчета уравнения (4.30) представлены в табл. 12. Здесь приведены и численные значения длины начального участка  $L/d Re_d$  для прямоугольного канала. Из таблицы видно, что для канала параллельных пластин начальный участок выражается зависимостью  $L = 0,00588 d Re_d$ . Если принять  $s$  вместо  $d=4s$ , то получим, что  $L = 0,094 s Re_s$ .

Длина начального участка, определенная различными авторами, различна. Константа для определения  $L$  в вышеприведенном уравнении изменяется в пределах от 0,0047 [65] до 0,03 [24]. Из этого следует сделать вывод, что данный вопрос еще недостаточно изучен. Пока мало теоретических и экспериментальных результатов по определению длины начального участка с учетом влияния изменения физических свойств жидкости.

#### 4.2. Теплоотдача начального участка параллельных пластин при $T_w = \text{const}$

Эта задача может быть решена как точным, так и приближенным методом. В первом случае для решения к уравнениям динамического пограничного слоя (4.2) и (4.3) присоединяется уравнение энергии, выраженное в безразмерном виде [63]:

$$\bar{U} \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (4.31)$$

где  $\Theta = \frac{T - T_w}{T_f - T_w}$ , а граничные условия будут такие:

$$\text{при } X > 0 \quad Y = 0, \quad \Theta = 0,$$

$$\text{при } X = 0 \quad \Theta = 1.$$

Для небольших значений  $X$  аналогично решению динамической задачи принимаем следующее распределение температуры:

$$\Theta(X, \eta) = \Theta_0(\eta) + X^{\frac{1}{2}} \Theta_1(\eta) + X \Theta_2(\eta) \dots \quad (4.32)$$

Подставив (4.32) и (4.6) в (4.31), для определения функции  $\Theta(\eta)$  получаем ряд обыкновенных линейных уравнений с учетом решения результатов скоростного поля. Из этих уравнений, принимая во внимание граничные условия, численно определяем температурное поле при различных числах  $Pr$ .

В случае больших значений параметра  $X$  использовать уравнение (4.32) для расчета распределения температуры в канале параллельных пластин не представляется возможным. Мы ограничимся лишь определением теплового потока:

$$\alpha_m t_m F_q = U F_d \rho c_p [T - T_m], \quad (4.33)$$

где

$$t_m = \frac{(T - T_w) - (T_m - T_w)}{\ln \frac{T - T_w}{T_m - T_w}}. \quad (4.34)$$

$T_m$  — средняя объемная безразмерная температура жидкости.

Безразмерна температура жидкости при  $X \leq 8 \cdot 10^{-3}$  выражается уравнением:

$$T_m(X, Pr) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(Pr) X^{\frac{1}{2}}, \quad (4.35)$$

а при значениях  $X \geq 8 \cdot 10^{-3}$

$$T_m(X, Pr) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(Pr) \exp[-k_n(Pr)X]. \quad (4.36)$$

Значения коэффициентов  $c_i$  будут:  $c_1 = -2,656/Pr^{0,67}$ ,  $c_2 = -11,34/Pr^{0,6}$ ,  $c_3 = 121,6/Pr^{0,57}$ ,  $c_4 = -374,0/Pr^{0,56}$ . Коэффициенты  $K_n$ ,  $k_n$  представлены в табл. 13.

Таблица 13

Значения констант  $K_n$  и  $k_n$  в уравнении (4.36)

$Pr$	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$k_0$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	0,908	0,014	0,059	-0,007	30,2	330	343	630
10	0,910	0,053	0,015	-	3,02	34,3	99,7	-

Используя уравнения (4.33) и (4.34), получаем зависимость для определения среднего числа Нуссельта:

$$Nu_m(X) = \frac{\alpha_m d}{\lambda} = -\frac{Pr}{4X} \ln T_m(X), \quad (4.37)$$

где  $T_m(X)$  определяется из уравнений (4.35), (4.36).

Определение местной теплоотдачи в канале из параллельных пластин можно осуществить и приближенным решением уравнения теплового потока (3.2) [65], принимая распределение температуры, аналогичное распределению скорости [см. (4.15)]:

$$\frac{T-T_w}{T_f-T_w} = 2 \frac{y}{\delta_T} - 2 \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 + \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^4. \quad (4.38)$$

С учетом уравнений (4.15) и (4.38) в (3.2) после ряда вычислений получим соотношение между толщинами гидродинамического и теплового пограничных слоев:

$$\frac{d}{dx} [U_0 \cdot \delta_T \cdot F(\xi)] = -a \frac{2}{\delta_T}, \quad (4.39)$$

где

$$F(\xi) = -\frac{2}{15} \frac{\delta_T}{\delta} + \frac{3}{140} \left( \frac{\delta_T}{\delta} \right)^3 - \frac{1}{180} \left( \frac{\delta_T}{\delta} \right)^4. \quad (4.40)$$

Вместо  $U_0$  подставляем значение из (4.18). Полученное выражение после некоторых преобразований представим в следующем виде:

$$UF(\xi) \cdot \xi \left[ 1 + 1,04 \frac{\delta}{s} + 0,21 \left( \frac{\delta}{s} \right)^2 - 0,101 \left( \frac{\delta}{s} \right)^3 \dots \right] \frac{\partial \delta}{\partial x} = -a \frac{2}{\xi \delta T}, \quad (4.41)$$

где  $\xi = \frac{\delta T}{\delta}$ .

Толщина динамического пограничного слоя и  $\partial \delta / \partial x$  определяются из (4.19). Тогда из (4.41) получаем:

$$F(\xi) \xi^2 = -0,117 \frac{a}{v} \frac{1 + 1,67 \left( \frac{\delta}{s} \right) + 0,91 \left( \frac{\delta}{s} \right)^2}{1 + 1,04 \left( \frac{\delta}{s} \right) + 0,21 \left( \frac{\delta}{s} \right)^2 - 0,101 \left( \frac{\delta}{s} \right)^3}. \quad (4.42)$$

Подставляя значение  $F(\xi)$  из (4.40), находим:

$$\frac{2}{15} \xi^3 + \frac{3}{140} \xi^5 + \frac{1}{180} \xi^6 = 0,117 \frac{\Phi_s}{\delta}. \quad (4.43)$$

Соотношение  $\xi$  может быть найдено численными методами путем последовательных приближений или по уравнению

$$\xi = \Phi_s / Pr^{\frac{1}{3}}, \quad (4.44)$$

где значения  $\Phi_s$  по [65] приведены в табл. 14.

Таблица 14                      Значения функций  $\Phi_s = \Phi \left( \frac{\delta}{s} Pr \right)$  в уравнениях (4.44), (4.47)

$Pr \backslash \delta/s$	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,7	1,008	1,031	1,054	1,096	1,137	1,177	1,216
1,0	1,000	1,022	1,044	1,086	1,126	1,165	1,203
2,0	0,986	1,007	1,028	1,068	1,107	1,144	1,181
3,0	0,979	1,002	1,002	1,061	1,099	1,135	1,171
5,0	0,977	0,996	1,018	1,057	1,094	1,132	1,167

Коэффициент теплоотдачи определится из уравнения теплообмена (3.5) с учетом зависимости (4.38):

$$\alpha_x = -\frac{\lambda}{T_w - T_f} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{2\lambda}{\delta T} = 2 \frac{\lambda}{\xi \delta}, \quad (4.45)$$

$$Nu_x = \frac{\alpha_x}{\lambda} = \frac{2x}{\xi \delta}. \quad (4.46)$$

Теплоотдачу канала из параллельных пластин можно представить уравнением:

$$Nu_x / Re_s = \frac{2x}{\xi \delta Re_s} = \frac{2s}{\xi \delta} X = \frac{2}{\Phi_s} Pr^{\frac{1}{3}} \frac{s}{\delta} X. \quad (4.47)$$

Теплоотдача начального участка параллельных пластин, а также ее сравнение с теплоотдачей пластины в бесконечном потоке, представлены на

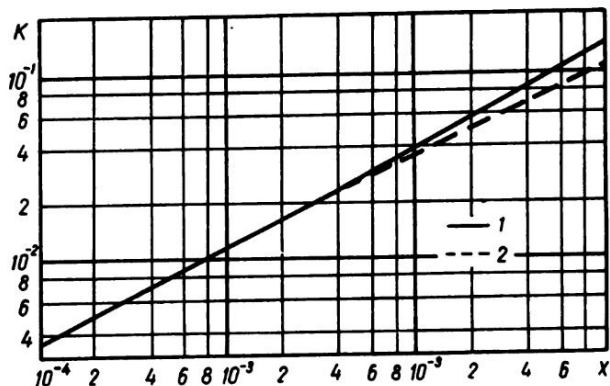


Рис. 29. Сопоставление теплоотдачи пластины и начального участка параллельных пластин. 1 — параллельные пластины, 2 — пластина.  $K = Nu_x Re_x^{-0,5} Pr^{-0,33}$ ,  $X = \frac{x}{s Re_s}$

рис. 29. Из сравнения видно, что теплообмен в начальном участке более интенсивный.

В случае постоянной температуры стенки средний теплообмен в начальном участке параллельных пластин может быть выражен асимптотической зависимостью [63]:

$$Nu_m = 7,55 + \frac{0,024 \left( Pr Re_d \frac{d}{l} \right)^{1,14}}{1 + 0,0358 \cdot Pr^{0,81} \left( Re_d \frac{d}{l} \right)^{0,64}}. \quad (4.48)$$

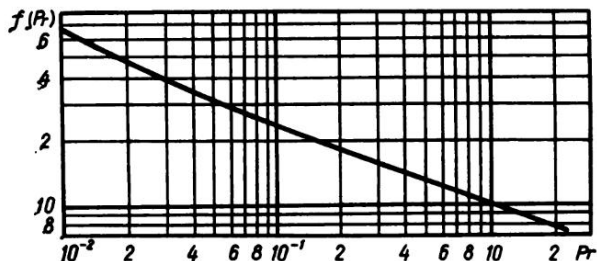


Рис. 30. Значения функции  $f(Pr)$  в уравнении (4.49)

Е. Спэрроу [65] для случая данного граничного условия предлагает следующую формулу:

$$Nu_m = \frac{0,664}{f(Pr)} \cdot \left( \frac{1}{Re_d} \frac{l}{d} \right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + c \left( \frac{1}{Re_d} \frac{l}{d} \right)^{n'}}. \quad (4.49)$$

При значениях  $Pr > 2$  функция  $f(Pr) = Pr^{\frac{1}{3}}$ ,  $c = 6,27$ ,  $n' = 4/9$ . В случае  $Pr < 2$  функция  $f(Pr)$  определяется по графику рис. 30, если принять, что  $c = 7,3$ ,  $n' = 1/2$ .

#### 4.3. Теплотдача начального участка параллельных пластин при $q_w = \text{const}$

Для решения задачи теплообмена в начальном участке канала при данном граничном условии [96] может быть использован интегральный метод Кармана—Польгаузена. Для осуществления решения уравнение (3.2) преобразуется:

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} u (T - T_f) \right] = q_w. \quad (4.50)$$

В этом уравнении скорость выражается полиномом второй степени

$$u/U_0 = 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad (4.51)$$

а распределение температуры выражается уравнением:

$$T - T_f = \frac{5}{8} \frac{q_w \delta_T}{\lambda} \left[ 1 - \frac{8}{5} \left( \frac{y}{\delta_T} \right) + \frac{4}{5} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 - \frac{1}{5} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^4 \right]. \quad (4.52)$$

После подстановки в уравнение (4.50) уравнения (4.51) и (4.52) с учетом заданных граничных условий для определения толщины пограничного слоя  $\delta_T$  при  $Pr \geq 1$  получаем зависимость:

$$\frac{\delta_T^3}{\delta \cdot s^3} (0,187 - 0,038 \frac{\delta_T}{\delta}) = \frac{8}{5} \frac{X \cdot U}{Pr \cdot U_0}. \quad (4.53)$$

Коэффициент теплотдачи может быть подсчитан по уравнению:

$$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_f}. \quad (4.54)$$



При  $y=0$  из уравнения (4.52) получаем:

$$T_w - T_f = \frac{5}{8} \frac{q_w \delta_T}{\lambda}, \quad (4.55)$$

где  $\delta_T$  определяется из уравнения (4.53). Сравнение количества тепла, полученного жидкостью, с тепловым потоком, генерированным на поверхности, дает соотношение:

$$T_f - T_w = \frac{q_w}{\rho \cdot s \cdot c_p \cdot U}. \quad (4.56)$$

Уравнения (4.53) – (4.56) позволяют получить критериальную зависимость для определения местной теплоотдачи плоского канала:

$$Nu_x = \left[ \frac{5}{8} \left( \frac{\delta_T}{\delta} \right) - \frac{x}{s} / Re_s Pr \right]^{-1}. \quad (4.57)$$

Изменение коэффициента теплоотдачи согласно этому уравнению при различных числах  $Pr$  представлено на рис. 31. Из этого графика видно, что все кривые асимптотически приближаются к одному пределу, т. е. предельному числу  $Nu$ , равному 2,06 и соответствующему термически стабилизированному режиму течения. Если за определяющий размер принять  $d$ , то предельное число станет равным  $Nu=8,24$ .

Из графика четко видно влияние числа  $Pr$  на скорость наступления термически установившегося режима. Длина участка термической стабилизации с увеличением числа  $Pr$  увеличивается.

Определение длины термической стабилизации ведется по обобщенной зависимости:

$$L_T = 0,14 s Re_s Pr. \quad (4.58)$$

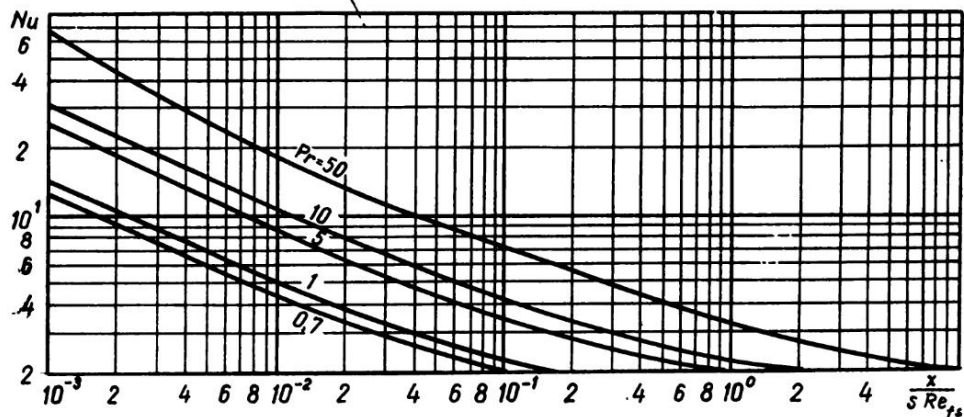


Рис. 31. Изменение теплоотдачи в начальном участке параллельных пластин при  $q_w = \text{const}$ ,  $Nu = \alpha s / \nu$

Как и при предыдущих граничных условиях, в данном случае также может быть использовано точное решение уравнений, выражающих процесс теплообмена в начальном участке канала. После нахождения распределения скорости из уравнений (4.2) и (4.3) результаты подставляются в уравнение энергии (4.31), которое решается численно, методом конечных разностей [97].

Определение точным методом изменения температуры потока и жидкости согласно [97] представлено на рис. 32, откуда видно, что при постоянном тепловом потоке несколько дальше от входа температурный напор при больших числах  $Pr$  становится практически постоянным. Поэтому данный метод

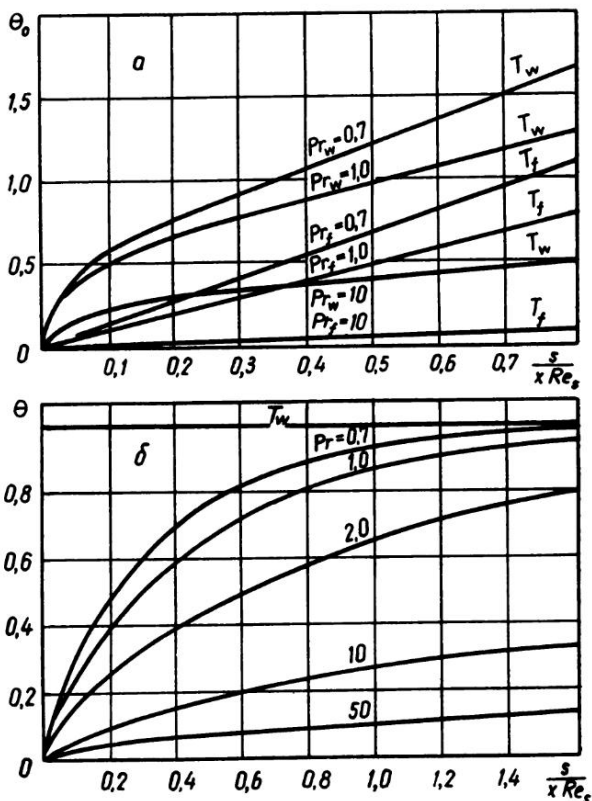


Рис. 32. Распределение температур жидкости и поверхности в начальном участке параллельных пластин.  $a$  — при  $q_w = \text{const}$ ,

$b$  — при  $T_w = \text{const}$ ,  $\Theta_0 = \frac{(T - T_f) \lambda}{q_w s}$

расчета теплообмена можно использовать и для случая, когда вдоль канала поддерживается постоянный температурный напор между температурами поверхности и жидкости. Указанной особенности изменения температурного напора при постоянной температуре стенки не наблюдается (см. рис. 32б).

# 5 Теоретический расчет теплообмена при гидродинамически установившемся течении в плоском канале

## 5.1. Общие замечания

Точные аналитические методы решения конвективного теплообмена, основанные на непосредственном интегрировании уравнений движения и энергии, могут быть применены для практических целей лишь в очень ограниченной мере при упрощающих предположениях.

Поэтому более распространенными являются приближенные методы [17, 76, 78], которые применяются при исследованиях реальных практических задач. Сущность этих методов заключается в том, что распределения скорости или температуры по сечениям пограничного слоя представляются функциями, которые задаются, а не получаются как результат интегрирования уравнений пограничного слоя.

Ввиду больших трудностей вычислительного характера в настоящее время получили распространение лишь однопараметрические методы приближенных решений. По мере своего развития они существенно улучшаются, становятся более простыми и более точными. За последнее время в связи с появлением цифровых электронных вычислительных машин (ЦЭВМ) расширились возможности применения приближенных методов и их уточнения.

Слабым местом обычного интегрального метода является произвольный выбор аналитического вида профиля, часто плохо согласующегося с точным решением. Для того, чтобы уменьшить это расхождение, решение, полученное обычным интегральным методом, можно рассматривать только как первое приближение [76]. Это первое приближение далее снова подставляется в первоначальное дифференциальное уравнение, которое преобразуется в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение. Решение последнего уравнения дает окончательное выражение для теплообменной характеристики. Найденный таким образом профиль скорости или температуры значительно лучше согласуется с точным решением (в случае постоянной вязкости), чем произвольно выбранный профиль.

Упомянутый выше метод далее используется для получения аналитического решения задачи Гретца о теплообмене при вынужденном ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале.

Во многих случаях, когда разность температур потока и поверхности велика, необходимо обратить внимание на изменение физических свойств жидкости от температуры. Это, в первую очередь, относится к вязкости, теплопроводности и теплоемкости. Из табл. 15 видно, что существенно от температуры зависит лишь вязкость.

Таблица 15

Соотношения физических параметров жидкостей при температурах 20 и 120°C

Жидкость	$\frac{\rho_{20^\circ}}{\rho_{120^\circ}}$	$\frac{c_p 20^\circ}{c_p 120^\circ}$	$\frac{\lambda_{20^\circ}}{\lambda_{120^\circ}}$	$\frac{\mu_{20^\circ}}{\mu_{120^\circ}}$
	Вода . . . . .	1,06	0,98	0,87
Трансформаторное масло . . . . .	1,07	0,74	1,08	12,9
Масло МС . . . . .	1,07	1,15	1,09	99,0
Масло МК . . . . .	1,09	1,27	1,20	124
Глицерин . . . . .	1,07	0,81	0,96	167

Ниже рассмотрим аналитические решения для случая стационарного осесимметричного ламинарного движения несжимаемой жидкости с переменной вязкостью при следующих допущениях:

- 1) распределение скоростей во входном сечении плоского канала является параболическим,
- 2) температура жидкости на входе постоянна по сечению и равна  $T_f$ ;
- 3) скорость движения невелика и диссипацией энергии можно пренебречь; в потоке отсутствуют внутренние источники тепла;
- 4) влияние массовых сил мало по сравнению с влиянием сил вязкости и давления;
- 5) плотность теплового потока вдоль оси плоского канала, обусловленная теплопроводностью, мала по сравнению с плотностью теплового потока поперек канала, обусловленной конвекцией,
- 6) давление  $p$  по сечению канала постоянно.

Схема течения в плоском канале представлена на рис. 33.

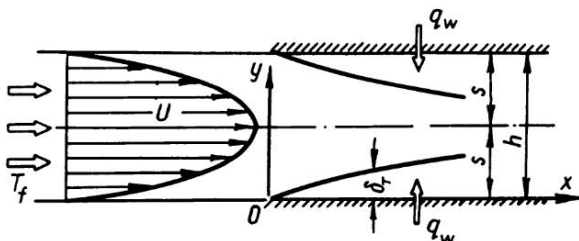


Рис. 33. Схема течения жидкости в плоском канале

С учетом указанных допущений задача описывается системой уравнений (2.1а), (2.6) и (3.6), к которой присоединяется температурная зависимость вязкости:

$$\mu = \mu(T). \quad (5.1)$$

Система уравнений (2.1a), (2.6), (3.6) и (5.1) упрощается, если предположить, что изменения температуры потока в канале незначительны. В силу этого допущения принимаем, что  $v \ll u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ , или  $v \approx 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$ . Таким образом, течение несжимаемой жидкости переходит в вязкостное, где в потоке основную роль играют силы вязкости и давления. Тогда задаче соответствует следующая система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{dp}{dx}, \quad (5.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (5.3)$$

$$\mu = \mu(T). \quad (5.4)$$

Зависимость коэффициента вязкости от безразмерной температуры выражается уравнением [17]:

$$\mu_w/\mu = 1 + b'_1 \Theta + b'_2 \Theta^2 + \dots + b'_n \Theta^n, \quad (5.5)$$

которое позволяет с требуемой степенью точности описать практически любую опытную кривую для коэффициента вязкости. Во многих случаях для большинства минеральных масел в умеренно широком температурном интервале применима двучленная зависимость

$$\mu_w/\mu = 1 + b'_1 \Theta \quad (5.6)$$

или

$$\frac{\mu}{\mu_w} = \frac{1}{1 + \gamma \Theta}, \quad (5.7)$$

где  $\gamma = b'_1, b'_2 \dots$  — постоянные, зависящие от рода жидкости и интервала температур.

В этих уравнениях безразмерная температура выражается зависимостью

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_f - T_w}. \quad (5.8)$$

Ниже при теоретическом расчете теплообмена попутно определяются распределения скоростей и коэффициенты сопротивления трения.

В настоящей главе за определяющий размер в критериях подобия принимается высота канала  $h$ .

## 5.2. Теплообмен при установившемся течении в плоском канале при $T_w = \text{const}$

Рассмотрим задачу о теплообмене в участке установившегося течения жидкости при постоянной температуре стенки. Сначала, используя выше-приведенные зависимости, вычислим распределение скорости и температуры.

Для совместного решения уравнений энергии и движения уравнение (5.2) интегрируется дважды по  $y$ , после чего получается:

$$u = -\frac{dp}{dx} \int_0^y \frac{(s-y)}{\mu} dy. \quad (5.9)$$

При  $\mu = \text{const}$  из уравнения (5.9) получаем известную зависимость:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (hy - y^2). \quad (5.10)$$

Согласно уравнению сохранения расхода находим среднюю скорость жидкости, отнесенную к единице ширины канала:

$$U = \frac{\int_0^s u dy}{s} = -\frac{1}{s} \frac{dp}{dx} \int_0^s \left[ \int_0^y \frac{(s-y)}{\mu} dy \right] dy, \quad (5.11)$$

а также градиент давления

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{Us}{\int_0^s \left[ \int_0^y \frac{s-y}{\mu} dy \right] dy}. \quad (5.12)$$

С помощью уравнений (5.9) и (5.12) выражаем безразмерную скорость

$$\bar{U} = \frac{u}{U} = \frac{s \int_0^y \frac{(s-y)}{\mu} dy}{\int_0^s \left[ \int_0^y \frac{(s-y)}{\mu} dy \right] dy}. \quad (5.13)$$

Теперь уравнение (5.3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\int_0^Y \frac{(1-Y)}{\mu} dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y \frac{(1-Y)}{\mu} dY \right] dY} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (5.14)$$

где

$$\bar{X} = \frac{x}{2s} \cdot \frac{a}{2sU} = \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{Pe}, \quad Y = \frac{y}{s}.$$

Уравнение (5.14) с вышеуказанной зависимостью  $\mu = \mu(\Theta)$  решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \bar{X} \leq 0 \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad T = T_f (\text{const}), \\ \text{при } \bar{X} > 0 \quad Y = 0, \quad T = T_w (\text{const}). \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

**1. Начальный термический участок.** Зависимость коэффициента вязкости от температуры принимается по (5.5), а температурное распределение в области начального термического участка задается следующим полиномом четвертой степени:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta = a_0 + a_1 \left(\frac{Y}{\Delta}\right) + a_2 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^4, \quad 0 \leq Y \leq \Delta, \\ \Theta = 1, \quad \Delta \leq Y \leq 1, \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

где  $\Delta = \delta_T/s$ .

Значения констант  $a_0 - a_4$  определяются в процессе двукратного дифференцирования по  $y$  уравнения (5.16) при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } Y=0 \quad \Theta=0, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = 0, \\ \text{при } Y=\Delta \quad \Theta=1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

После подстановки констант  $a_i$  в уравнение (5.16) получаем распределение температур в области начального термического участка

$$\left. \begin{array}{l} \Theta = 2 \frac{Y}{\Delta} - 2 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^3 + \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^4, \quad 0 \leq Y \leq \Delta, \\ \Theta = 1, \quad \Delta \leq Y \leq 1. \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

Тогда

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{2}{\Delta} - 6 \frac{Y^2}{\Delta^3} + 4 \frac{Y^4}{\Delta^5}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = -12 \frac{Y}{\Delta^3} + 12 \frac{Y^3}{\Delta^5}. \quad (5.20)$$

С учетом первого из уравнений (5.18) уравнение (5.5) сводится к виду

$$\frac{\mu_w}{\mu} = 1 + b_1 \frac{Y}{\Delta} + b_2 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^2 + \dots = \sum_{i=0}^n b_i \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^i, \quad (5.21)$$

где  $b_i$  — новые постоянные, причем  $b_0 = 1$ .

Теперь с помощью уравнения (5.21) уравнение (5.14) примет следующий вид:

$$\frac{\int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY \right] dY} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}. \quad (5.22)$$

Интегрирование уравнения (5.22) проводится отдельно в области теплового пограничного слоя и в ядре потока:

$$\int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} \left( \frac{Y^{i+1}}{i+1} - \frac{Y^{i+2}}{i+2} \right), \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY \right] dY = \\ & = 4 \int_0^{\Delta} \left[ \int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY \right] dY + \\ & + 4 \int_{\Delta}^1 \left[ \int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY \right] dY. \end{aligned} \quad (5.24)$$



После интегрирования получаем:

$$4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY \right] dY = 4 (P_0 + P_1 \Delta + P_2 \Delta^2 + P_3 \Delta^3), \quad (5.25)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{3} \frac{\mu_w}{\mu_f}, & P_1 &= -\frac{\mu_w}{\mu_f} + \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{i+1}, \\ P_2 &= \frac{\mu_w}{\mu_f} - 2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{i+2}, & P_3 &= -\frac{1}{3} \frac{\mu_w}{\mu_f} + \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{i+3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Температурная производная выразится:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial \Theta}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{X}}, \quad (5.27)$$

где

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Delta} = -2 \frac{Y}{\Delta^3} + 6 \frac{Y^2}{\Delta^4} - 4 \frac{Y^4}{\Delta^5}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \left( -2 \frac{Y}{\Delta^3} + 6 \frac{Y^2}{\Delta^4} - 4 \frac{Y^4}{\Delta^5} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{X}}. \quad (5.28)$$

Подставив выражения (5.23)–(5.28) в уравнение (5.22) и проинтегрировав его в пределах термического пограничного слоя, определяем неизвестную величину  $\Delta$ :

$$(R_1 \Delta^2 + R_2 \Delta^3) \frac{d\Delta}{d\bar{X}} = -8 (P_0 + P_1 \Delta + P_2 \Delta^2 + P_3 \Delta^3), \quad (5.29)$$

где

$$R_1 = -12 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+1)(i+3)(i+5)(i+6)},$$

$$R_2 = 12 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)(i+4)(i+6)(i+7)}.$$

Имея в виду, что  $\Delta=0$  при  $\bar{X}=0$ , уравнение (5.29) можно проинтегрировать так:

$$\bar{X} = \int_0^{\Delta} \left[ \frac{R_1 \Delta^2 + R_2 \Delta^3}{-8(P_0 + P_1 \Delta + P_2 \Delta^2 + P_3 \Delta^3)} \right] d\Delta. \quad (5.30)$$

При известном соотношении между  $\Delta$  и  $\bar{X}$  [согласно (5.30)] по уравнению (5.18) можно определить распределение температуры и теплоотдачу канала. Уравнение (5.13) совместно с уравнением (5.21) позволяют определить профиль скоростей, а уравнение (5.12) — градиент давления.

Местный коэффициент теплоотдачи, отнесенный к начальной разности температур, выражается уравнением:

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{T_f - T_w} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.31)$$

или в безразмерной форме:

$$Nu_x = 2 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \quad (5.32)$$

Из (5.19) получаем температурный градиент на стенке

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} = \frac{2}{\Delta}. \quad (5.33)$$

Тогда местное число Нуссельта

$$Nu_x = \frac{4}{\Delta}. \quad (5.34)$$

При изотермическом течении жидкости  $\mu = \mu_w = \mu_f = \text{const}$ ,  $\sum_{i=0}^n b_i = 1$  ( $i=0$ ) и уравнение (5.30) легко интегрируется, так как  $P_0=1/3$ ,  $P_1=P_2=P_3=0$ ,  $R_1=-2/15$ ,  $R_2=1/28$ .

Интегрирование дает:

$$\bar{X} = \frac{1}{60} \Delta^3 - \frac{3}{896} \Delta^4.$$

Учитывая уравнение (5.34), получаем:

$$Nu_x^3 = \frac{16}{15} Pe \frac{h}{x} \left( 1 - \frac{45}{56} \cdot \frac{1}{Nu_x} \right). \quad (5.35)$$

При значениях  $\Delta \ll 1$  (что соответствует каналу малой приведенной длины  $\bar{X}$ ) величиной  $\frac{45}{56} \cdot \frac{1}{Nu_x} = \frac{45 \Delta}{224}$  можно пренебречь и местный теплообмен представить уравнением

$$Nu_x = 1,022 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.36)$$

а средний теплообмен – уравнением

$$Nu = 1,533 \left( Pe \frac{h}{l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.37)$$

Коэффициенты в уравнениях (5.36) и (5.37) на 4,3% выше коэффициентов в точных решениях М. Левека [98] и М. Боднареску [99].

Аналогичные коэффициенты в формулах при выражении температурного распределения полиномом второй степени [78] на 11% выше точного решения М. Левека.

Распределение скорости согласно уравнению (5.13) дает: при  $Y \leq \Delta$

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} \left( \frac{Y^{i+1}}{i+1} - \frac{Y^{i+2}}{i+2} \right), \quad (5.38)$$

где

$$A = P_0 + P_1 \Delta + P_2 \Delta^2 + P_3 \Delta^3. \quad (5.39)$$

При  $Y \geq \Delta$

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \left\{ \frac{\mu_w}{\mu_f} \left[ (Y - \Delta) - \frac{1}{2} (Y^2 - \Delta^2) \right] + \sum_{i=0}^n b_i \left( \frac{\Delta}{i+1} - \frac{\Delta^2}{i+2} \right) \right\}, \quad (5.40)$$

поскольку

$$\int_0^Y \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY = \int_0^{\Delta} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\Delta^i} (Y^i - Y^{i+1}) dY + \int_{\Delta}^Y \frac{\mu_w}{\mu_f} (1 - Y) dY.$$

Уравнения (5.38) и (5.40) полностью совпадают с уравнениями, полученными в исследовании [74].

Этим и заканчивается расчет обычным интегральным методом. Решение, полученное этим методом, рассматриваем только как первое приближение, так как температурный профиль (5.18) был выбран произвольно.

Далее проводится уточнение методики по [76]. Решение  $\Delta = \varphi(\bar{X})$  по (5.30), полученное в первом приближении, подставляется в первоначальное дифференциальное уравнение (5.22), в результате решения которого определяется уточненный температурный профиль.

После преобразования координат  $(\bar{X}, Y)$  в  $(\bar{x}, \bar{\xi})$  при помощи соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2},$$

где

$$\Delta' = \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{X}} \quad \text{и} \quad \bar{\xi} = \frac{Y}{\Delta},$$

дифференциальное уравнение (5.22) сводится к следующему виду:

$$H(\Delta, \bar{\xi}) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{x}} - \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \bar{\xi}^2}. \quad (5.41)$$

Здесь

$$H(\Delta, \bar{\xi}) = \frac{1}{4A} \sum_{i=0}^n b_i \left( \frac{\bar{\xi}^{i+1}}{i+1} \Delta^3 - \frac{\bar{\xi}^{i+2}}{i+2} \Delta^4 \right). \quad (5.42)$$

Величины  $\Theta$ ,  $\partial \Theta / \partial \bar{x}$ ,  $\Delta$  и  $\Delta'$  в уравнении (5.41) можно заменить соответствующими выражениями, полученными в первом приближении. Тогда уравнение (5.41) преобразуется в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \bar{\xi}^2} + Z(\Delta, \bar{\xi}) \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} = Q(\Delta, \bar{\xi}), \quad (5.43)$$

где

$$Z(\Delta, \bar{\xi}) = H(\Delta, \bar{\xi}) \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{\xi},$$

$$Q(\Delta, \bar{\xi}) = -2H(\Delta, \bar{\xi}) \frac{\Delta'}{\Delta} (\bar{\xi} - 3\bar{\xi}^3 + 2\bar{\xi}^4).$$

Уравнение (5.43) для любых значений  $\bar{x}$  (или  $\Delta$ ) решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \bar{x} \geq 0 \quad \bar{\xi} = 0, \quad \Theta = 0, \\ \text{при } \bar{x} > 0 \quad \bar{\xi} = 1, \quad \Theta = 1. \end{array} \right\} \quad (5.44)$$

Решение выражается через определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \Theta(\bar{x}, \bar{\xi}) = & \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} \right)_{\bar{\xi}=0} \cdot \int_0^{\bar{\xi}} \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} + \\ & + \int_0^{\bar{\xi}} \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) \left[ \int_0^{\bar{\xi}} Q \exp \left( + \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} \right)_{\bar{\xi}=0} = & \left\{ 1 - \int_0^1 \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left[ \int_0^{\bar{\xi}} Q \exp \left( + \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} \right\} \left[ \int_0^1 \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Уравнение (5.45) представляет уточненное температурное распределение в термическом пограничном слое начального участка плоского канала. Согласно уравнению (5.32) местное число Нуссельта, отнесенное к начальной разности температур,

$$Nu_x = \frac{2}{\Delta} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} \right)_{\bar{\xi}=0}, \quad (5.47)$$

где температурный градиент на стенке определяется уравнением (5.46).

Если местный коэффициент теплоотдачи отнести к разности средней температуры жидкости в данном сечении канала и температуры стенки, то

$$Nu_x = \frac{2}{\Delta \Theta_m} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\xi}} \right)_{\bar{\xi}=0}, \quad (5.48)$$

где

$$\Theta_m = \frac{\int_0^s u \Theta dy}{\int_0^s u dy} = \frac{1}{A} \left\{ \Delta^2 \int_0^{\frac{1}{\Delta}} \Theta \left[ \int_0^{\bar{\xi}} \sum_{l=0}^n b_l (\bar{\xi}^l - \Delta \bar{\xi}^{l+1}) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} \right\}. \quad (5.49)$$

Распределение скорости согласно уравнению (5.13) определяется зависимостью:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \frac{\Delta}{A} \int_0^{\bar{\xi}} \sum_{i=0}^n b_i (\bar{\xi}^i - \Delta \bar{\xi}^{i+1}) d\bar{\xi}, & 0 \leq \bar{\xi} \leq 1, \\ \bar{U} &= \frac{1}{A} \left\{ \Delta \int_0^1 \sum_{i=0}^n b_i (\bar{\xi}^i - \Delta \bar{\xi}^{i+1}) d\bar{\xi} + \frac{\mu_w}{\mu_f} [(Y - \Delta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (Y^2 - \Delta^2)] \right\}, & 1 \geq Y \geq \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

а местный коэффициент сопротивления трения

$$f = - \frac{2d}{\rho \bar{U}^3} \left( \frac{dp}{dx} \right) = \frac{16}{A Re_w}. \quad (5.51)$$

При изотермическом течении жидкости  $\sum_{i=0}^n b_i = 1$  ( $i=0$ ),  $A=1/3$  и уравнения (5.50), (5.51) обращаются в известные уравнения:

$$\bar{U} = 3 \left( Y - \frac{Y^2}{2} \right), \quad (5.52)$$

$$f = \frac{48}{Re_w}, \quad (5.53)$$

описывающие распределение скорости и коэффициент сопротивления трения в плоском канале при стабилизированном течении жидкости.

**2. Область установившегося теплообмена.** В этой области толщина термического пограничного слоя теряет физический смысл и температурный профиль задается уравнением:

$$\Theta = c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2 + c_3 Y^3 + c_4 Y^4, \quad (5.54)$$

где константы  $c_i$  определяются из граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } Y=0 \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} &= 0, \\ \text{при } Y=1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Определяя константы  $c_i$ , получаем:

$$\Theta = c_1 \left( Y - Y^3 + \frac{1}{2} Y^4 \right), \quad (5.56)$$

где  $c_1 = \varphi(\bar{X})$ .

В большинстве практических случаев зависимость вязкости от температуры с достаточной точностью описывается трехчленом (5.5):

$$\mu_w/\mu = 1 + b_1 \Theta + b_2 \Theta^2, \quad (5.57)$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  — постоянные, зависящие от рода жидкости и интервала температур.

С учетом зависимости (5.56) последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\mu_w}{\mu} = 1 + \sum_{i=1}^8 m_i Y^i, \quad (5.58)$$

где

$$m_1 = b_1 c_1, \quad m_2 = m_5 = m_6 = b_2 c_1^2, \quad m_3 = -m_1,$$

$$m_4 = \frac{m_1}{2} - 2 m_2, \quad m_7 = -m_2, \quad m_8 = \frac{m_2}{4}.$$

Теперь дифференциальное уравнение в частных производных (5.14) имеет вид:

$$\frac{\int_0^Y (1-Y) \left(1 + \sum_{i=1}^8 m_i Y^i\right) dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y) \left(1 + \sum_{i=1}^8 m_i Y^i\right) dY \right] dY} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}. \quad (5.59)$$

Температурная производная выражается так:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial c_1}{\partial \bar{X}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial c_1},$$

где

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_1} = Y - Y^3 + \frac{1}{2} Y^4.$$

Тогда

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \left( Y - Y^3 + \frac{1}{2} Y^4 \right) \frac{\partial c_1}{\partial \bar{X}}. \quad (5.60)$$

Вторая температурная производная

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = -6 c_1 Y + 6 c_1 Y^2. \quad (5.61)$$

Проинтегрировав уравнение (5.59) по  $Y$  с учетом (5.60) и (5.61), в пределах от 0 до 1 определяем коэффициент  $c_1$ :

$$\frac{\left(\frac{39}{280} + \frac{2207}{69300} b_1 c_1 + \frac{485}{48048} b_2 c_1^2\right)}{\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{7} b_1 c_1 + \frac{304}{3465} b_2 c_1^2\right)} \cdot \frac{dc_1}{d\bar{X}} = -c_1. \quad (5.62)$$

Для смыкания решения в рассматриваемой области с решением для начального термического участка должно быть удовлетворено условие  $c_1 = 2$  при  $\bar{X} = \bar{X}_0$ , где  $\bar{X}_0$  — значение  $\bar{X}$  в случае  $\Delta = 1$ . Тогда уравнение (5.62) имеет такое решение:

$$\begin{aligned} c_1^2 \left( \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{7} b_1 c_1 + \frac{304}{3465} b_2 c_1^2}{\frac{4}{3} + \frac{4}{7} b_1 + \frac{1216}{3465} b_2} \right)^{\frac{7811}{77064}} = \\ = 4 \exp \left\{ -\frac{\frac{7}{375} b_1}{\sqrt{\frac{4864}{10395} b_2 - \frac{4}{49} b_1^2}} \left[ \arctg \left( \frac{\frac{2}{7} b_1 + \frac{608}{3465} b_2 c_1}{\sqrt{\frac{4864}{10395} b_2 - \frac{4}{49} b_1^2}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctg \left( \frac{\frac{2}{7} b_1 + \frac{1216}{3465} b_2}{\sqrt{\frac{4864}{10395} b_2 - \frac{4}{49} b_1^2}} \right) \right] - \frac{2240}{117} (\bar{X} - \bar{X}_0) \right\}. \quad (5.63) \end{aligned}$$

Второе приближение для температурного профиля получаем двукратным интегрированием уравнения (5.59) с учетом (5.56):

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{c_1'}{\frac{4}{3} + 8 \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{(i+1)(i+2)(i+3)}} \left\{ -\frac{39}{280} Y + \frac{1}{12} Y^4 - \frac{1}{40} Y^5 - \frac{1}{30} Y^6 + \right. \\ + \frac{1}{42} Y^7 - \frac{1}{224} Y^8 - \sum_{i=1}^8 m_i \left[ \frac{i^4 + 22i^3 + 178i^2 + 608i + 702}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)(i+5)(i+6)(i+7)} \right] Y + \\ + \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{(i+1)(i+3)(i+4)} Y^{i+4} - \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{(i+2)(i+4)(i+5)} Y^{i+5} - \\ - \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{(i+1)(i+5)(i+6)} Y^{i+6} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 m_i \frac{(3i+4)}{(i+1)(i+2)(i+6)(i+7)} Y^{i+7} - \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{(i+2)(i+7)(i+8)} Y^{i+8} \right\}, \quad (5.64) \end{aligned}$$



где  $c_1'$  — первая производная по  $\bar{X}$ . Постоянные интегрирования в уравнении (5.64) получены из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } Y=1 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0, \\ \text{при } Y=0 \quad \Theta = 0. \end{array} \right\} \quad (5.65)$$

Число Нуссельта в этой области согласно (5.47) и (5.48) выражается зависимостью

$$Nu = 2c_1 \quad (5.66)$$

или

$$Nu = \frac{2c_1}{\Theta_m}, \quad (5.67)$$

так как  $\Delta=1$ , а  $(\partial\Theta/\partial Y)_{Y=0} = c_1$ .

В первом случае коэффициент теплоотдачи отнесен к начальному температурному напору ( $T_f - T_w$ ), а во втором — к разности средней температуры жидкости в данном сечении канала и температуры стенки ( $T_m - T_w$ ). Безразмерная температура  $\Theta_m$  определяется из уравнения (5.49) с учетом (5.64).

Распределение скорости и коэффициент сопротивления трения определяются уравнениями:

$$U = \frac{\int_0^Y (1-Y) \left(1 + \sum_{l=1}^8 m_l Y^l\right) dY}{\int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y) \left(1 + \sum_{l=1}^8 m_l Y^l\right) dY \right] dY}, \quad (5.68)$$

$$f = \frac{16}{Re_w} \frac{1}{\int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y) \left(1 + \sum_{l=1}^8 m_l Y^l\right) dY \right] dY}. \quad (5.69)$$

**Расчет теплоотдачи по упрощенной зависимости для вязкости.** Если зависимость коэффициента вязкости от температуры принимается по (5.7), то в этом случае для выражения дифференциального уравнения в частных производных имеем:

$$\frac{\int_0^Y (1-Y) (1 + \gamma\Theta) dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y) (1 + \gamma\Theta) dY \right] dY} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (5.70)$$

где  $\gamma$  — постоянный параметр, характеризующий зависимость вязкости от температуры (положительный при охлаждении жидкости и отрицательный при нагревании).

Температурное распределение в области начального термического участка аналогично прежнему, т. е. задается полиномом четвертой степени (5.18). Граничные условия принимаются те же самые (5.17). Интегрирование уравнения (5.70) проводится аналогично уравнению (5.22).

В итоге решение первого приближения в области начального термического участка представляется уравнением [79]:

$$(F_1 + \gamma F_2) \frac{d\Delta}{d\bar{X}} = F_3 + \gamma F_4, \quad (5.71)$$

где  $F$  — величины, зависящие от  $\Delta$ .

Соотношение между  $\Delta$  и  $\bar{X}$  выражается зависимостью:

$$\bar{X} = \int_0^{\Delta} \left( \frac{F_1 + \gamma F_2}{F_3 + \gamma F_4} \right) d\Delta. \quad (5.72)$$

При изотермическом течении жидкости  $\gamma = 0$  и интегрирование уравнения (5.72) приводит к результату (5.35).

Выражение для температурного профиля во втором приближении имеет вид уравнения (5.45), однако принимают новый вид зависимости (5.42) и (5.49):

$$H(\Delta, \bar{\xi}) = \frac{\Delta^3 \left[ \bar{\xi} + \left( \gamma - \frac{\Delta}{2} \right) \bar{\xi}^2 - \frac{2}{3} \gamma \Delta \bar{\xi}^3 - \frac{1}{2} \gamma \bar{\xi}^4 + \frac{1}{5} \gamma (1 + 2\Delta) \bar{\xi}^5 - \frac{1}{6} \gamma \Delta \bar{\xi}^6 \right]}{\frac{4}{3} + 4\gamma \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{10} \Delta + \frac{2}{15} \Delta^2 - \frac{1}{42} \Delta^3 \right)}, \quad (5.73)$$

$$\Theta_m = \frac{1}{B} \left\{ \Delta^2 \int_0^{1/\Delta} \Theta \left[ \int_0^{\bar{\xi}} (1 - \Delta \bar{\xi})(1 + \gamma \Theta) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} \right\}, \quad (5.74)$$

где

$$B = \Delta^2 \int_0^1 \left[ \int_0^{\bar{\xi}} (1 - \Delta \bar{\xi})(1 + \gamma \Theta) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} + \int_0^1 (1 - \Delta \bar{\xi})(1 + \gamma \Theta) d\bar{\xi} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{6} \Delta^3 + \gamma \left( -\frac{11}{30} + \frac{2}{15} \Delta - \frac{2}{15} \Delta^2 + \frac{1}{10} \Delta^3 \right). \quad (5.75)$$

В области течения жидкости с установившимся теплообменом температурный профиль в первом приближении определяется уравнением (5.56).

Уравнения для определения коэффициента  $c_1$  и температурного профиля во втором приближении получаем из выражений (5.62)–(5.64), принимая в них  $b_2=0$ .

3. Область с  $\delta_T \ll s$ . Математическая формулировка данной задачи совпадает с формулировкой, приведенной в начале данной главы или работы [79] и выражается зависимостями (5.2)–(5.4). При этом полностью сохраняются ранее принятые допущения, однако к ним добавляется еще одно: толщина теплового пограничного слоя  $\delta_T$  предполагается малой по сравнению с высотой плоского канала  $h$ .

Безразмерную температуру, характеризующую профиль температур, обозначим через

$$\Theta = \frac{T - T_f}{T_w - T_f}. \quad (5.76)$$

Заметим, что уравнение энергии (5.3) записано для потоков с большим числом  $Pe$ , т. е. без теплопроводности осевого (продольного) направления. Как показано в работе [100], влиянием осевой проводимости можно пренебречь в случае значений критерия  $Pe \geq 100$ . Так как число  $Pe$  велико, то толщина теплового пограничного слоя  $\delta_T$  значительно меньше высоты плоского канала  $h$  (рис. 33) и задача ограничивается рассмотрением канала малой длины.

Уравнение (5.2) интегрируется дважды по  $y$  (с условием, что  $du/dy=0$  при  $y=h/2$ ), после чего получается:

$$u = -\frac{dp}{dx} \int_y^h \frac{(y-h/2)}{\mu} dy. \quad (5.77)$$

Значение средней скорости, отнесенной к единице ширины канала, получаем из уравнения сохранения расхода:

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h \left[ \int_y^h \frac{(y-h/2)}{\mu} dy \right] dy. \quad (5.78)$$

В случае изотермического течения жидкости  $\mu = \text{const}$  и уравнение (5.78) выражается зависимостью

$$U = -\frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (5.79)$$

Профиль температур в первом приближении, а, следовательно, и закономерности теплоотдачи могут быть найдены из теоретического решения дифференциального уравнения энергии (5.3).

Приравняв левую часть уравнения (5.3) к некоторой постоянной и проинтегрировав дважды по  $y$  при граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \text{ и } y=h, \quad \Theta=1, \\ \text{при } y=h/2, \quad \Theta=0, \end{array} \right\} \quad (5.80)$$

находим температурное распределение поперек пограничного слоя:

$$\Theta = \left(2 \frac{y}{h} - 1\right)^2. \quad (5.81)$$

Зависимость вязкости от температуры выражаем в виде ряда:

$$\mu_f/\mu = 1 + b_1\Theta + b_2\Theta^2 + \dots = 1 + \sum_{i=1}^n b_i\Theta^i. \quad (5.82)$$

С учетом выражения (5.81) уравнение (5.82) дает:

$$\frac{\mu_f}{\mu} = 1 + \sum_{i=1}^n b_i \left(2 \frac{y}{h} - 1\right)^{2i}. \quad (5.83)$$

Подставляя далее (5.83) в (5.77) и выполнив интегрирование, получаем:

$$u = -\frac{h^3}{2\mu_f} \frac{dp}{dx} \left\{ \frac{y}{h} - \frac{y^3}{h^3} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{4i+4} \left[ 1 - \left(2 \frac{y}{h} - 1\right)^{2i+2} \right] \right\}. \quad (5.84)$$

Средняя скорость согласно уравнению (5.78) с учетом (5.83) выражается следующей зависимостью:

$$U = -\frac{h^3}{12\mu_f} \cdot \frac{dp}{dx} \left( 1 + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+3} \right). \quad (5.85)$$

После введения безразмерных величин из уравнений (5.84) и (5.85) находим:

$$U = \frac{u}{U} = \frac{6 \left\{ Y_0 - Y_0^3 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{4i+4} \left[ 1 - (2Y_0 - 1)^{2i+2} \right] \right\}}{1 + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+3}}, \quad (5.86)$$

где  $Y_0 = \frac{y}{h}$ . В случае изотермического течения жидкости  $\left(\sum_{i=1}^n b_i = 0, i=0\right)$  уравнение (5.86) превращается в (5.52).

Согласно (5.86) безразмерная скорость на оси плоского канала выражается уравнением

$$U_0 = \frac{\frac{3}{2} + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+2}}{1 + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+3}}, \quad (5.87)$$

а в случае  $i=1$ , когда вязкость находим по формуле (5.82) с помощью двух членов ряда, из уравнения (5.87) получаем:

$$U_{0_{i=1}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w} - 1\right)}{1 + \frac{3}{5} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w} - 1\right)}. \quad (5.88)$$

В условиях задачи для относительно коротких каналов важны лишь такие значения  $y$ , которые на много меньше высоты канала  $h$ . Поэтому в уравнении (5.86) для пристеночной области можно пренебречь членами, содержащими  $Y_0$  в степени выше первой [98, 101]. Тогда выражение для безразмерной скорости, которая действительна только для пристеночной области, примет вид:

$$U \approx 6\bar{\beta}Y_0, \quad (5.89)$$

где

$$\bar{\beta} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n b_i}{1 + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+3}} \quad (5.90)$$

является поправочным коэффициентом, учитывающим влияние изменения вязкости от температуры. Постоянные  $b_i$ , зависящие от рода жидкости и интервала температур, легко определяются на основании экспериментальных данных. В случае изотермического течения жидкости  $\left(\sum_{i=1}^n b_i = 0\right)$  поправочный

коэффициент  $\bar{\beta} = 1$ . При  $i=1$  получаем гиперболическую зависимость вязкости от температуры [формула (5.82) с двумя членами ряда] и поправочный коэффициент

$$\bar{\beta}_{i=1} = \frac{\frac{\mu_f}{\mu_w}}{1 + \frac{3}{5} \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} - 1 \right)}. \quad (5.91)$$

Как известно, в пристеночной области наблюдается обратная картина изменения скорости в зависимости от направления теплового потока. Поправочный коэффициент  $\bar{\beta}$  правильно отражает это явление. Так, например, если  $\mu_f/\mu_w > 1$  (нагревание жидкости), то из (5.91) следует, что  $\bar{\beta} > 1$  и скорость у стенки больше соответствующего изотермического случая: если же  $\mu_f/\mu_w < 1$  (охлаждение жидкости), то  $\bar{\beta} < 1$  и скорость у стенки меньше.

Далее уравнение энергии (5.3) с учетом (5.89) переписывается так:

$$6\bar{\beta}U \frac{y}{h} \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (5.92)$$

а в безразмерном виде

$$6\bar{\beta}Y_0 Pe \frac{\partial \Theta}{\partial X_0} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y_0^2}, \quad (5.93)$$

где

$$X_0 = x/h, \quad Y_0 = y/h,$$

$$Pe = \frac{Uh}{a}.$$

Поставленная задача может быть решена точно. Для этого введем новую безразмерную переменную

$$z = Y_0 \left( \frac{\bar{\beta} Pe}{X_0} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.94)$$

и будем считать, что температура  $\Theta$  является функцией только от  $z$ .

Теперь уравнение (5.93) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \Theta}{dz^2} + 2z \frac{d\Theta}{dz} = 0, \quad (5.95)$$

решение которого при граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } X_0 \geq 0 \text{ и } z=0 \quad \Theta = 1, \\ \text{при } X_0 \geq 0 \text{ и } z = \infty \quad \Theta = 0 \end{array} \right\} \quad (5.96)$$

имеет вид:

$$\Theta = 1 - \int_0^z \exp\left(-\frac{2}{3} z^3\right) dz \left[ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2}{3} z^3\right) dz \right]^{-1}. \quad (5.97)$$

Второе из граничных условий (5.96) получили в силу предположения о малой толщине теплового пограничного слоя, т. е. полагая, что среда с постоянной температурой  $T_f$  простирается в бесконечность.

Местное число Нуссельта, отнесенное к начальной разности температур, выражается уравнением

$$Nu_x = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y_0}\right)_{Y_0=0} = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot \left(\bar{\beta} Pe \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.98)$$

Температурный градиент на стенке согласно (5.97) выражается зависимостью:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2}{3} z^3\right) dz} = -\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad (5.99)$$

а местное число Нуссельта определяется по формуле:

$$Nu_x = 0,978 \left(\bar{\beta} \cdot Pe \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.100)$$

Среднее значение критерия Нуссельта можно описать так:

$$Nu = 1,467 \left(\bar{\beta} Pe \frac{h}{l}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.101)$$

При изотермическом течении жидкости ( $\bar{\beta} = 1$ ) зависимости (5.100) и (5.101) совпадают с известными формулами М. Левека [98] и М. Боднареску [99] для плоского канала малой приведенной длины ( $x/Pe \cdot h \leq 0,001$ ).

Для оценки принятого ранее предположения о изменении толщины теплового пограничного слоя  $\delta_T$  имеем:

$$\delta_T \sim \frac{\lambda(T_w - T_f)}{q_w} \sim \left( \frac{h^2 x}{\beta Pe} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.102)$$

откуда видно, что для потоков с большим числом  $Pe$  неравенство  $\delta_T \ll h$  выполняется действительно.

### 5.3. Теплообмен при установившемся течении в плоском канале при $q_w = \text{const}$

Общая постановка и математическая формулировка данной задачи совпадают с формулировкой, приведенной в разделе 5.2. Поэтому для исследования теплообмена плоского канала при постоянной плотности теплового потока на стенке могут быть использованы те же самые уравнения (5.2)–(5.4).

Выполнив двукратное интегрирование уравнения (5.2) по  $y$  и подставив полученное значение  $u$  в (5.3), получаем выражение уравнения энергии:

$$\frac{\int_0^Y \frac{(1-Y)}{\mu} dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y \frac{(1-Y)}{\mu} dY \right] dY} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \quad (5.103)$$

где

$$\bar{X} = \frac{x}{2s} \cdot \frac{a}{2sU} = \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{Pe},$$

$$Y = \frac{y}{s}.$$

Уравнение (5.103) с зависимостью (5.4) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \bar{X} \leq 0 \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad T = T_f(\text{const}), \\ \text{при } \bar{X} > 0 \quad Y = 0, \quad -\frac{\lambda}{s} \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{Y=0} = q_w(\text{const}), \\ \quad \quad \quad Y = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$



В случае постоянной температуры стенки ( $T_w = \text{const}$ ) определяется распределение плотности теплового потока. В данном же случае ( $q_w = \text{const}$ ) определению подлежит распределение температуры  $T_w(x)$  вдоль стенки плоского канала. Для решения этой задачи вводится новая безразмерная температурная переменная:

$$\vartheta = \frac{\lambda(T-T)f}{sq_w}, \quad (5.105)$$

где  $q_w$  — тепловой поток, который является положительным в случае нагревания жидкости.

Зависимость вязкости от температуры в большинстве практических случаев может быть определена трехчленом второй степени

$$\mu_f/\mu = 1 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2, \quad (5.106)$$

где  $b_1, b_2$  — постоянные, зависящие от рода жидкости и интервала температур.

1. **Начальный термический участок.** Зависимость коэффициента вязкости от температуры принимается по (5.106), а температурное распределение в области начального термического участка задается следующим полиномом четвертой степени:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= a_0 + a_1\bar{\xi} + a_2\bar{\xi}^2 + a_3\bar{\xi}^3 + a_4\bar{\xi}^4, & 0 \leq Y \leq \Delta, \\ \vartheta &= 0, & \Delta \leq Y \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.107)$$

Коэффициенты полинома  $a_i$  определяются из следующих граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \text{при } Y=0 \quad (\bar{\xi}=0) \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial Y} &= -1, & \frac{\partial^2\vartheta}{\partial Y^2} &= 0, \\ \text{при } Y=\Delta \quad (\bar{\xi}=1) \quad \vartheta &= 0, & \frac{\partial\vartheta}{\partial Y} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial Y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.108)$$

Первое условие получено из выражения (5.105) с учетом того, что  $q_w(\text{const}) = (-\lambda/s)(\partial T/\partial Y)_{Y=0}$ , второе — из уравнения (5.103), проинтегрированного и записанного для  $Y=0$ . После подстановки коэффициентов  $a_i$  в уравнение (5.107) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{\Delta}{2} (1 - 2\bar{\xi} + 2\bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^4), & 0 \leq Y \leq \Delta, \\ \vartheta &= 0, & \Delta \leq Y \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

Теперь с помощью уравнений (5.105) и (5.106) уравнение (5.103) приводится к виду

$$\frac{\int_0^Y (1-Y)(1+b_1\vartheta+b_2\vartheta^2) dY}{4 \int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y)(1+b_1\vartheta+b_2\vartheta^2) dY \right] dY} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2}. \quad (5.110)$$

С учетом уравнения температурного распределения (5.109) уравнение (5.110) интегрируется отдельно в области теплового пограничного слоя и в ядре потока аналогично случаю  $T_w = \text{const}$  в разделе 5.2.

Интегрирование уравнения (5.110) в пределах термического пограничного слоя дает:

$$(D_0 + b_1 D_1 + b_2 D_2) \frac{d\Delta}{d\bar{X}} = 4 + b_1 D_3 + b_2 D_4. \quad (5.111)$$

Имея в виду, что  $\Delta = 0$  при  $\bar{X} = 0$ , уравнение (5.111) можно проинтегрировать:

$$\bar{X} = \int_0^{\Delta} \left( \frac{D_0 + b_1 D_1 + b_2 D_2}{4 + b_1 D_3 + b_2 D_4} \right) d\Delta, \quad (5.112)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= \Delta^2 \left( \frac{3}{10} - \frac{1}{14} \Delta \right), & D_1 &= \Delta^2 \left( \frac{737}{8400} - \frac{1261}{92400} \Delta \right), \\ D_2 &= \Delta^4 \left( \frac{1249}{40040} - \frac{727}{200200} \Delta \right), & D_3 &= \frac{9}{5} \Delta^2 - \frac{4}{5} \Delta^3 + \frac{1}{7} \Delta^4, \\ D_4 &= \frac{23}{42} \Delta^3 - \frac{17}{105} \Delta^4 + \frac{47}{2310} \Delta^5. \end{aligned}$$

При известном соотношении между  $\Delta$  и  $\bar{X}$  согласно (5.112) можно определить теплообменные характеристики плоского канала.

Профиль скоростей определяется из уравнения

$$U = \frac{u}{U} = \frac{\int_0^Y (1-Y)(1+b_1\vartheta+b_2\vartheta^2) dY}{\int_0^1 \left[ \int_0^Y (1-Y)(1+b_1\vartheta+b_2\vartheta^2) dY \right] dY}, \quad (5.113)$$

а градиент давления—из уравнения (5.12). В нашем случае согласно (5.113) распределение скорости выражается:  
при  $Y \leq \Delta$

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=0}^9 \frac{c_i}{i+1} Y^{i+1}}{\frac{1}{3} + b_1 G_1 + b_2 G_2}, \quad (5.114)$$

при  $Y \geq \Delta$

$$\bar{U} = \frac{Y - \frac{1}{2} Y^2 + b_1 E_1 + b_2 E_2}{\frac{1}{3} + b_1 G_1 + b_2 G_2}, \quad (5.115)$$

где

$$E_1 = \frac{3}{20} \Delta^2 - \frac{1}{30} \Delta^3, \quad E_2 = \frac{23}{504} \Delta^3 - \frac{17}{2520} \Delta^4, \quad c_i = \varphi_i(b, \Delta).$$

Местное число Нуссельта, отнесенное к начальной разности температур, выражается уравнением

$$Nu_x = \frac{2sq_w}{\lambda(T_w - T_f)}, \quad (5.116)$$

содержащим искомую температуру  $T_w$ . Переходя к безразмерным температурам, имеем:

$$Nu_x = -\frac{2}{\vartheta_w - \vartheta_f} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \quad (5.117)$$

В нашем случае согласно (5.105)  $\vartheta_f = 0$ , температурный градиент на стенке  $(\partial \vartheta / \partial Y)_{Y=0} = -1$  и критерий Нуссельта

$$Nu_x = \frac{2}{\vartheta_w}. \quad (5.118)$$

В первом приближении согласно (5.109) безразмерная температура на стенке  $\vartheta_w = \Delta/2$ , и тогда

$$Nu_x = \frac{4}{\Delta}. \quad (5.119)$$

При изотермическом течении жидкости  $\mu/\mu_f = 1$  ( $b_1 = b_2 = 0$ ) и интегрирование уравнения (5.112) дает:

$$\bar{X} = \frac{1}{40} \Delta^3 - \frac{1}{224} \Delta^4. \quad (5.120)$$

С учетом уравнения (5.119) получаем:

$$Nu_x^3 = \frac{8}{5} Pe \frac{h}{x} \left(1 - \frac{5}{7} \frac{1}{Nu_x}\right). \quad (5.121)$$

При значениях  $\Delta \ll 1$  (что соответствует каналу малой приведенной длины  $\bar{X}$ ) величиной  $5/7 Nu_x = 5\Delta/28$  по сравнению с единицей можно пренебречь и местный теплообмен представить уравнением:

$$Nu_x = 1,170 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.122)$$

а средний теплообмен – уравнением:

$$Nu = 1,755 \left( Pe \frac{h}{l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.123)$$

Полученное в первом приближении решение  $\Delta = \varphi(\bar{X})$  согласно (5.112) далее подставляется в первоначальное дифференциальное уравнение (5.110), в результате решения которого определяется уточненный температурный профиль. Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые приводились в случае постоянной температуры стенки (раздел 5.2), получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{\xi}^2} + Z(\Delta, \bar{\xi}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\xi}} = Q(\Delta, \bar{\xi}), \quad (5.124)$$

где

$$Z(\Delta, \bar{\xi}) = H(\Delta, \bar{\xi}) \frac{\Delta'}{\Delta} \bar{\xi}, \quad (5.125)$$

$$\Delta' = \partial \Delta / \partial \bar{X},$$

$$Q(\Delta, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} H(\Delta, \bar{\xi}) \Delta' (1 - 2\bar{\xi} + 2\bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^4). \quad (5.126)$$

В уравнениях (5.125) и (5.126)

$$H(\Delta, \bar{\xi}) = \frac{\Delta \sum_{i=0}^9 \frac{d_i}{i+1} \bar{\xi}^{i+1}}{4 \left[ \sum_{i=0}^9 \frac{d_i}{(i+1)(i+2)} + \sum_{i=0}^9 \frac{d_i}{i+1} \left( \frac{1}{\Delta} - 1 \right) + \frac{1}{3\Delta} - 1 + \Delta - \frac{\Delta^3}{3} \right]}, \quad (5.127)$$

где

$$\begin{aligned}
 d_0 &= \Delta \left( 1 + \frac{1}{2} b_1 \Delta + \frac{1}{4} b_2 \Delta^2 \right), \quad d_1 = -\Delta^2 \left( 1 + b_1 + \frac{1}{2} b_1 \Delta + b_2 \Delta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} b_2 \Delta^2 \right), \quad d_2 = \Delta^3 (b_1 + b_2 + b_2 \Delta), \quad d_3 = \Delta^3 (b_1 + b_2 \Delta - b_2 \Delta^2), \\
 d_4 &= -\Delta^3 \left( \frac{1}{2} b_1 + b_1 \Delta + \frac{5}{2} b_2 \Delta + b_2 \Delta^2 \right), \\
 d_5 &= \Delta^3 \left( \frac{1}{2} b_1 + b_2 + \frac{5}{2} b_2 \Delta \right), \quad d_6 = \Delta^3 (b_2 - b_2 \Delta), \\
 d_7 &= -\Delta^3 (b_2 + b_2 \Delta), \quad d_8 = \Delta^3 \left( \frac{1}{4} b_2 + b_2 \Delta \right), \quad d_9 = -\frac{1}{4} b_2 \Delta^4.
 \end{aligned}$$

Уравнение (5.124) решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } \bar{\xi} = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\xi}} &= -\Delta, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{\xi}^2} = 0, \\
 \text{при } \bar{\xi} = 1 \quad \vartheta &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{\xi}^2} = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.128)$$

что в области термического пограничного слоя ( $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$ ) дает:

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= \vartheta_w - \Delta \int_0^{\bar{\xi}} \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} + \\
 &\quad + \int_0^{\bar{\xi}} \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) \left[ \int_0^{\bar{\xi}} Q \exp \left( + \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi}, \quad (5.129)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \vartheta_w &= \Delta \int_0^1 \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} - \\
 &\quad - \int_0^1 \exp \left( - \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) \left[ \int_0^{\bar{\xi}} Q \exp \left( + \int_0^{\bar{\xi}} Z d\bar{\xi} \right) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi}. \quad (5.130)
 \end{aligned}$$

Если местный коэффициент теплоотдачи отнести к разности между средней температурой жидкости в данном сечении канала и температурой стенки, то местное число Нуссельта выразится:

$$Nu_x = \frac{2}{\vartheta_w - \vartheta_m}, \quad (5.131)$$

где безразмерная средняя температура жидкости определяется:

$$\vartheta_m = \frac{\int_0^s u \vartheta dy}{\int_0^s u dy} = \frac{\Delta^2}{M} \int_0^{\bar{\xi}} \vartheta \left[ \int_0^{\bar{\xi}} (1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2) (1 - \Delta \bar{\xi}) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} \quad (5.132)$$

и

$$M = \Delta^2 \int_0^1 \left[ \int_0^{\bar{\xi}} (1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2) (1 - \Delta \bar{\xi}) d\bar{\xi} \right] d\bar{\xi} + \frac{1}{3} - \Delta + \Delta^2 - \frac{1}{3} \Delta^3 + \\ + \int_0^1 (1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2) (1 - \Delta \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \left(1 - \Delta - \frac{1}{\Delta}\right) \sum_{i=0}^9 \frac{d_i}{i+1}. \quad (5.133)$$

Уравнения для распределения скорости подобны уравнениям в случае постоянной температуры стенки. В данном случае согласно (5.113) они имеют вид:

$$U = \frac{\Delta}{M} \int_0^{\bar{\xi}} (1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2) (1 - \Delta \bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq 1, \quad (5.134)$$

$$U = \frac{\Delta}{M} \int_0^1 (1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2) (1 - \Delta \bar{\xi}) d\bar{\xi} + \\ + \frac{1}{M} \left( Y - \frac{1}{2} Y^2 - \Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 \right), \quad 1 \geq Y \geq \Delta. \quad (5.135)$$

При изотермическом течении жидкости  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $M = 1/3$  и зависимости (5.134), (5.135) обращаются в известное уравнение (5.52).

Местный коэффициент сопротивления трения определяется по уравнению

$$f = - \frac{2}{\rho U^2} \left( \frac{dp}{dx} \right) = \frac{16}{M Re_f}, \quad (5.136)$$

а в случае изотермического течения жидкости получаем известную зависимость  $f=48/Re_f$ .

**2. Область установившегося теплообмена.** В этой области температурный профиль также задается выражением (5.54) с граничными условиями, подобными (5.108), и сводится к уравнению

$$\vartheta = \vartheta_w - Y + Y^3 - \frac{1}{2} Y^4. \quad (5.137)$$

Основное уравнение энергии (5.110) теперь имеет вид:

$$\frac{\sum_{i=0}^9 \frac{e_i}{i+1} Y^{i+1}}{4 \sum_{i=0}^9 \frac{e_i}{(i+1)(i+2)}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2}, \quad (5.138)$$

где

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + b_1 \vartheta_w + b_2 \vartheta_w^2, & e_1 &= -1 - b_1 (1 + \vartheta_w) - b_2 \vartheta_w (2 + \vartheta_w), \\ e_2 &= b_1 + b_2 (1 + 2\vartheta_w), & e_3 &= b_1 - b_2 (1 - 2\vartheta_w), \\ e_4 &= -\frac{3}{2} b_1 - b_2 (2 + 3\vartheta_w), & e_5 &= \frac{1}{2} b_1 + b_2 (3 + \vartheta_w), \\ e_6 &= 0, & e_7 &= -2b_2, & e_8 &= \frac{5}{4} b_2, & e_9 &= -\frac{1}{40} b_2. \end{aligned}$$

Второе приближение для температурного профиля получается при двукратном интегрировании уравнения (5.138) с учетом (5.137):

$$\vartheta = \vartheta_w - Y + \frac{\sum_{i=0}^9 \frac{e_i}{(i+1)(i+2)(i+3)} Y^{i+3}}{\sum_{i=0}^9 \frac{e_i}{(i+1)(i+2)}}, \quad (5.139)$$

где

$$\vartheta_w = \frac{1}{2} + 4 (\bar{X} - \bar{X}_0). \quad (5.140)$$

Распределение скоростей и коэффициент трения определяются уравнениями (5.113) и (5.136) с учетом (5.139). Число Нуссельта в этой области

также выражается уравнениями (5.118) и (5.131), но с учетом зависимостей (5.139) и (5.140).

**3. Область с  $\delta_T \ll s$ .** Решение задачи теплообмена для канала малой длины выполняется при тех же условиях и допущениях, которые были сформулированы в разделе 5.2 применительно к течению жидкости в канале малой длины при  $T_w = \text{const}$ . Уравнения движения и энергии имеют вид (5.2) и (5.3).

Зависимость вязкости от температуры принимается в виде следующего ряда:

$$\mu_f / \mu = 1 + b_1 \vartheta + b_2 \vartheta^2 + \dots = 1 + \sum_{i=1}^n b_i \vartheta^i, \quad (5.141)$$

где  $\vartheta$  — новая безразмерная температурная переменная, определяемая как

$$\vartheta = \frac{\lambda(T - T_f)}{hq_w}. \quad (5.142)$$

Продифференцировав уравнение энергии (5.93) по  $Y_0$  и заменив  $\Theta$  новой безразмерной переменной  $\vartheta$ , имеем:

$$6\beta Pe \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X_0 \partial Y_0} = \frac{\partial}{\partial Y_0} \left( \frac{1}{Y_0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y_0^2} \right). \quad (5.143)$$

Поставленная задача решается точно [81]. После замены переменных по (5.94) окончательный результат выражается уравнением:

$$\vartheta = \left( \frac{X_0}{\beta Pe} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ z \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}, z\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right] + \frac{\exp\left(-\frac{2}{3} z^3\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right\}. \quad (5.144)$$

Согласно выражению (5.118) местное значение критерия Нуссельта

$$Nu_x = \frac{1}{\vartheta_w}, \quad (5.145)$$

где безразмерную температуру на стенке получаем из уравнения (5.144) при  $z=0$ :

$$\vartheta_w = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \left( \frac{X_0}{\beta Pe} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.146)$$



Подставив (5.146) в (5.145), имеем:

$$Nu_x = 1,183 \left( \bar{\beta} Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.147)$$

Среднее значение числа Нуссельта на длине канала  $l$  определяется из выражения:

$$Nu = 1,774 \left( \bar{\beta} Pe \frac{h}{l} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.148)$$

При изотермическом течении жидкости поправочный коэффициент  $\bar{\beta} = 1$  и зависимости (5.147), (5.148) совпадают с точным решением [73] для плоского канала малой приведенной длины ( $x/h Pe \leq 0,001$ ).

Поправочный коэффициент  $\bar{\beta}$ , учитывающий влияние изменения вязкости от температуры, в случае  $q_w = \text{const}$  определяется следующей зависимостью:

$$\bar{\beta} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n b_i \vartheta_w^i}{1 + 3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2i+3} \vartheta_w^i}, \quad (5.149)$$

а в случае гиперболической зависимости вязкости от температуры ( $i=1$ ) выражением

$$\bar{\beta}_{i=1} = \frac{1 + b_1 \vartheta_w}{1 + \frac{3}{5} b_1 \vartheta_w}, \quad (5.150)$$

где  $b_1$  — постоянный параметр, зависящий от рода жидкости и интервала температур. Неизвестная температура на стенке приближенно может быть определена из уравнения (5.146), если предположить, что вязкость постоянна. При известной вязкости  $\mu_w$  можно пользоваться и выражением (5.91), так как формулы (5.91) и (5.150) идентичны в случае  $i=1$ .

#### 5.4. Анализ результатов теоретического расчета

С целью сопоставления результатов теоретического решения с результатами работ других исследователей проведены конкретные расчеты теплообмена и гидравлического сопротивления для случаев  $T_w = \text{const}$  и  $q_w = \text{const}$ . Точность полученных результатов оценивается сравнением точного решения

изотермической задачи или формулы Б. С. Петухова [102] с решением данного расчета.

Все численные расчеты первого приближения проведены ручным или машинным способом, а результаты второго приближения получены с помощью ЦЭВМ Минск-14 и БЭСМ-2М.

1.  $T_w = \text{const}$ . Для случая постоянной температуры стенки проведен расчет для масла марки МК при следующих параметрах:  $T_f = 150^\circ\text{C}$ ,  $T_w = 38^\circ\text{C}$  и  $\mu_w/\mu_f = 58$ . Температурная зависимость вязкости масла МК представлена в виде опытной пунктирной кривой на рис. 34 по данным [75]. Из этого рисунка видно, что уравнение (5.7) в данном случае нечетко описывает зависимость вязкости от температуры. Поэтому в дальнейшем при расчете принималась

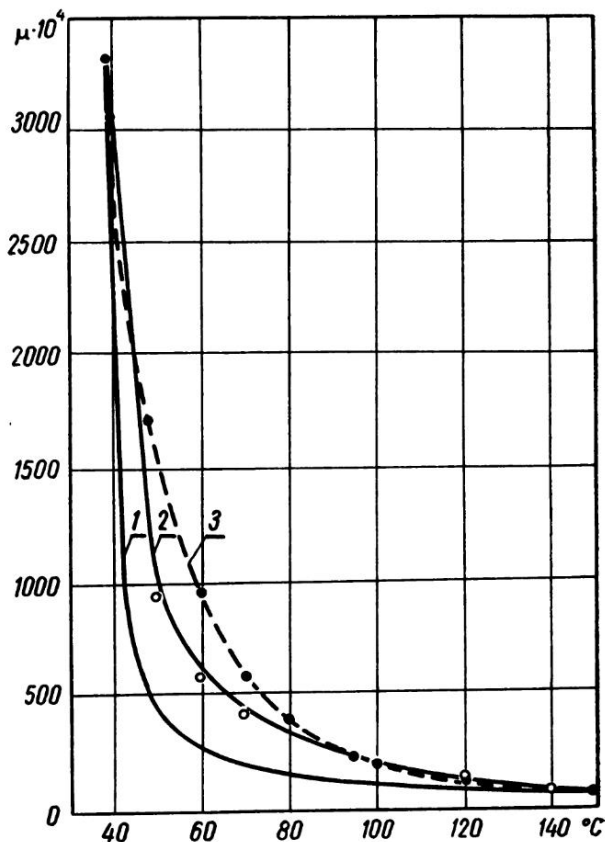


Рис. 34. Зависимость вязкости от температуры для масла МК. 1 — по (5.7) с учетом (5.18), 2 — по (5.21) с 3 членами ряда и с учетом (5.151), 3 — опытная кривая по данным [75], белые кружки — по (5.21) с 3 членами ряда и с учетом (5.18), черные точки — по (5.21) с 4 членами ряда и с учетом (5.18)

Таблица 16

Значения зависимости  $Nu_x$  от  $\bar{X}$  для масла МК при  $T_w = \text{const}$ 

$\Delta$	$Nu_1$ по (5.34)	$\bar{X} \cdot 10^6$			$Nu_2$ по (5.47)	$\frac{Nu_2 - Nu_1}{Nu_1} \cdot 100$ %
		вязкость по (5.7)	вязкость по (5.21)	работа [78]		
0,01	400	—	0,007	0,005	432	7,93
0,02	200	0,064	0,036	0,032	216	7,95
0,05	80	0,998	0,592	0,540	86,3	7,86
0,10	40	8,13	4,90	4,30	43,3	8,33
0,20	20	67,5	41,8	37,8	21,7	8,50
0,50	8	1167	799	929	8,82	10,3
0,80	5	5190	3970	—	5,64	12,8
1,00	4	10570	8690	11930	4,59	14,8

зависимость (5.21) с 4 членами ряда, дающая хорошее совпадение с экспериментальной кривой 3.

Расчет проведен при использовании уравнений (5.30), (5.34), (5.35), (5.46) и (5.47). Результаты расчета в виде формулы  $Nu_x = \varphi(X)$  представлены на рис. 35 и в табл. 16. На графике также нанесены результаты других исследований для случая постоянных физических свойств.

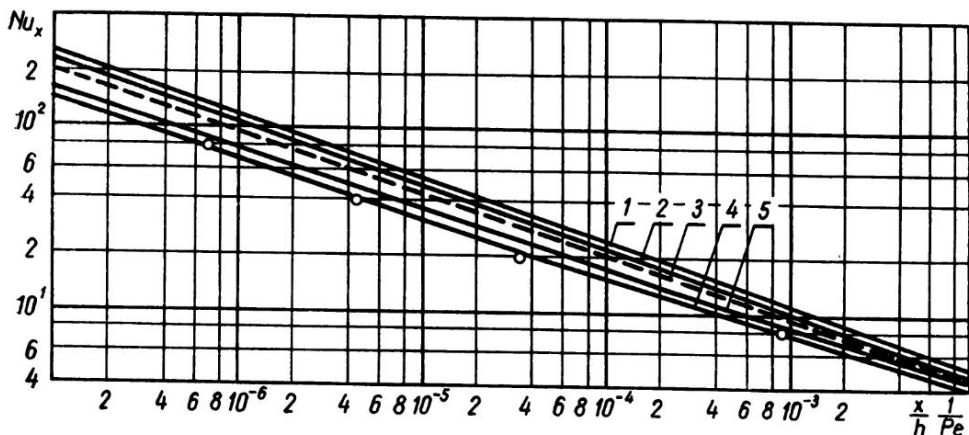


Рис. 35. Зависимость  $Nu_x = \varphi(x/hPe)$  по теоретическому расчету при переменной и постоянной вязкости. 1 — по формуле Б. С. Петухова [74], 2 — по формуле (5.35), 3 — по формуле М. Левека [98] при  $\mu = \text{const}$ , 4 — первое приближение  $Nu_1$  по (5.34), 5 — второе приближение  $Nu_2$  по (5.47), точки — по данным расчета Б. С. Петухова [14]

Из рис. 35 видно, что полученные нами результаты при  $\mu = \text{const}$  хорошо согласуются с результатами точного решения М. Левека [98] и расчетами Б. С. Петухова [78]. Из табл. 16 и рис. 35 видно, что в среднем значения  $Nu_2$

(второе приближение) на 9–10% выше значений  $Nu_1$  (первое приближение). Более заметное расхождение наблюдается в конце начального термического участка (12–15%). Кривые 4 и 5 сначала идут параллельно кривым 1, 2, 3, а затем их уклон постепенно увеличивается по мере нарастания толщины

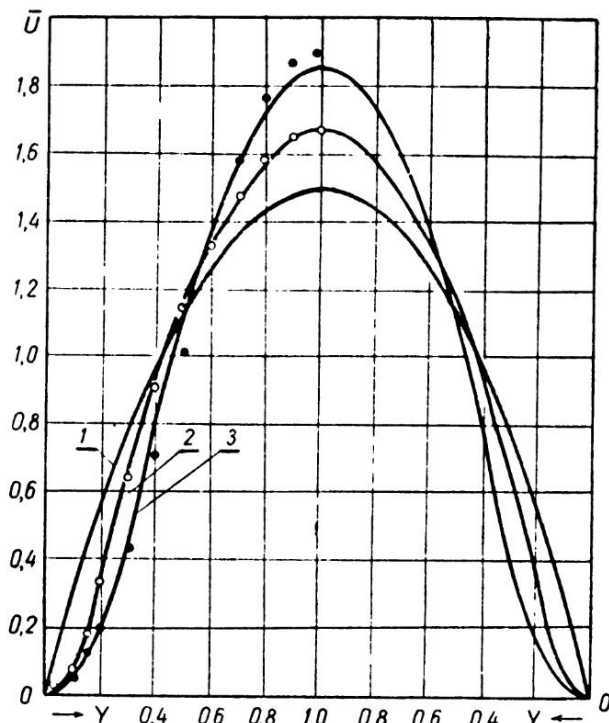


Рис. 36. Распределение безразмерной скорости  $U$  по сечению плоского канала при различных значениях  $\bar{X}$ . 1 —  $\Delta=0$ ,  $\bar{X}=0$ , 2 —  $\Delta=0,2$ ,  $\bar{X}=41,8 \times 10^{-6}$ , 3 —  $\Delta=0,5$ ,  $\bar{X}=799 \cdot 10^{-6}$ , точки — по работе [74]

теплового пограничного слоя. Такой характер кривых 4 и 5 полностью совпадает с результатами теоретического решения [78].

На рисунках 36 и 37 показано распределение скорости и температуры по сечению плоского канала при различных значениях приведенной длины  $\bar{X}=x/Pe \cdot h$  для масла МК.

Профили температур подсчитаны по формуле (5.18), а профили скоростей — по формулам (5.38) и (5.40). Кривая 1 на рис. 36 соответствует изотермическому течению и вместе с тем дает распределение скорости на входе в плоский канал.

Из рис. 36 видно, что изменение вязкости с температурой оказывает существенное влияние на профиль скорости. В случае охлаждения масла МК при  $\mu_w/\mu_f=58$  скорость у стенки меньше, а в ядре больше по сравнению со скоростью

при изотермическом течении. Такой характер изменения скорости объясняет влияние переменной вязкости на теплообмен и гидравлическое сопротивление.

Как видно из табл. 3 приложений, использование полинома четвертой степени для температурного распределения дает меньшее значение для  $\bar{U}$

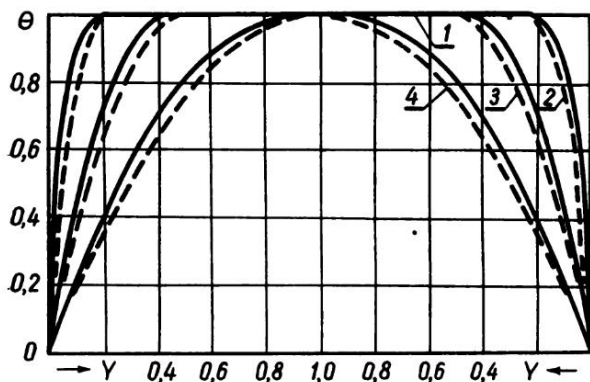


Рис. 37. Распределение безразмерной температуры  $\Theta$  по сечению плоского канала при различных значениях  $\Delta$ . 1 — 0,2 — 0,2, 3 — 0,5, 4 — 1,0, пунктир — работа [74]

у самой стенки и в ядре потока по сравнению с использованием полинома второй степени [78]. Из рис. 37 также видно, что температурный профиль, выраженный полиномом четвертой степени, является более заполненным по сравнению с полиномом второй степени. Вычисленные значения для  $\Theta$  по уравнению (5.18) в среднем на 5% больше значений  $\Theta$ , вычисленных по квадратичной параболе:

$$\Theta = 2\frac{Y}{\Delta} - \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^2. \quad (5.151)$$

Предельное число  $Nu$ , вычисленное по уравнению (5.66), для случая охлаждения масла МК, при  $\bar{X} = 1500 \cdot 10^{-6}$  ( $\bar{X}_0 = 10570 \cdot 10^{-6}$ ) дает  $Nu = 2c_1 = 2 \cdot 1,923 = 3,85$ , где значение  $c_1 = 1,923$  получено из уравнения (5.63). В случае изотермического течения жидкости ( $\gamma = 0$ )  $c_1 = 2,0$  и предельное число  $Nu = 4,0$ . Результаты расчета гидравлического сопротивления при течении масла МК даны в табл. 17.

Значения местного коэффициента сопротивления трения получены из уравнения (5.51) с учетом зависимостей (5.39) и (5.26). Как видно из табл. 17, результаты данного расчета несколько меньше по сравнению с результатами теоретического расчета Б. С. Петухова [78].

Расчеты профилей скорости (табл. 3 приложений) и гидравлического сопротивления проведены при использовании уравнения вязкости (5.21) с четырьмя членами ряда.

Таблица 17

Местный коэффициент трения при течении масла МК

$\Delta$	Данный расчет		Работа [78]	
	$\bar{X} \cdot 10^6$	$f Re_w$	$\bar{X} \cdot 10^6$	$f Re_w$
0	0	0,828	0	0,829
0,01	0,007	0,838	0,005	0,842
0,02	0,036	0,849	0,032	0,856
0,05	0,592	0,884	0,54	0,922
0,10	4,90	0,944	4,30	0,978
0,20	41,8	1,080	37,8	1,154
0,50	799	1,639	929	1,906
1,00	8690	3,25	11930	3,78

С целью выяснения применимости полиномов различной степени был проведен сравнительный анализ результатов решений с использованием для температурного распределения полиномов второй, третьей и четвертой степени. Случай  $\mu = \text{const}$  ( $\gamma = 0$ ) соответствует изотермической задаче, для которой имеется точное решение [98, 99]. Это обстоятельство позволяет сравнить результаты точного решения с результатами решений при использовании полиномов различной степени.

Так, например, первое приближение при использовании полинома второй степени для температурного распределения (5.151) дает следующее решение:

$$Nu_x^3 = \frac{4}{3} Pe \frac{h}{x} \left( 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{Nu_x} \right). \quad (5.152)$$

Использование полинома третьей степени дает:

$$Nu_x^3 = \frac{32}{15} Pe \frac{h}{x} \left( 1 - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{Nu_x} \right), \quad (5.153)$$

а при использовании полинома четвертой степени для начального термического участка получаем уравнение (5.35):

$$Nu_x^3 = \frac{16}{15} Pe \frac{h}{x} \left( 1 - \frac{45}{56} \cdot \frac{1}{Nu_x} \right).$$

Наконец, точное решение [98, 99] для плоского канала малой приведенной длины ( $\bar{X} \leq 0,001$ ) представляется уравнением

$$Nu_x = 0,978 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.154)$$

При значениях  $\Delta \ll 1$ , что соответствует каналу малой приведенной длины, уравнения (5.152), (5.153) и (5.35) упрощаются и легко приводятся к виду уравнения (5.154).

Как видно из табл. 18, использование полинома четвертой степени для температурного распределения дает хорошее совпадение результатов с данными точного решения. Полиномы второй и особенно третьей степени дают заметное расхождение.

Таблица 18

Зависимость  $Nu_x$  от выбранного температурного распределения в случае  $T_w = \text{const}$

Полином	$Nu_x$	Расхождение в % по сравнению с [98]
$\Theta = 2 \frac{Y}{\Delta} - \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^2$	$Nu_x = 1,101 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	+ 12,5
$\Theta = \frac{3}{2} \frac{Y}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^3$	$Nu_x = 1,288 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	+ 31,7
$\Theta = 2 \frac{Y}{\Delta} - 2 \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^3 + \left(\frac{Y}{\Delta}\right)^4$	$Nu_x = 1,022 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	+ 4,5
Точное решение [98, 99]	$Nu_x = 0,978 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	0,0

Ниже дается анализ результатов теоретического расчета для плоского канала малой приведенной длины ( $x/hPe \leq 0,001$ ).

На рис. 38 и в табл. 4 приложений показано изменение безразмерной скорости на оси плоского канала в зависимости от соотношения  $\mu_f/\mu_w$  при  $i=1$ .

Как видно, при охлаждении жидкости безразмерная скорость на оси канала изменяется более интенсивно, чем при нагревании жидкости. Так, например,

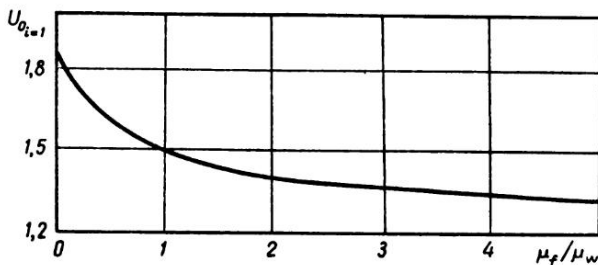


Рис. 38. Изменение безразмерной скорости на оси плоского канала  $U_{0,i=1}$  в зависимости от направления теплового потока по (5.88)

при охлаждении жидкости скорость на оси может отличаться от скорости при соответствующем изотермическом случае до 25 %, а при нагревании жидкости — до 17 %. Эти результаты качественно и количественно хорошо согласуются с результатами работы Б. С. Петухова [78].

На рис. 39 и в табл. 5 приложений показано изменение поправочного коэффициента  $\bar{\beta}$ , учитывающего влияние изменения вязкости от температуры

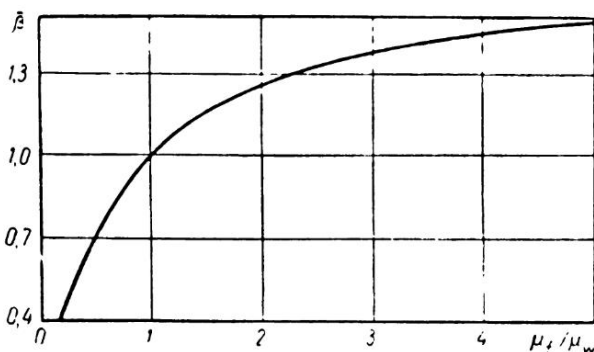


Рис. 39. Изменение поправочного коэффициента  $\bar{\beta}$  в зависимости от направления теплового потока по (5.90) при  $i=1$

в зависимости от соотношения  $\mu_f/\mu_w$ . Как видно, диапазон изменения поправочного коэффициента  $\bar{\beta}_{i=1}$  следующий:  $0 \leq \bar{\beta}_{i=1} \leq 5/3$ .

Полученная для среднего теплообмена формула (5.101) при  $i=1$  была сопоставлена с известной формулой Б. С. Петухова [102]:

$$Nu = 1,55 \left( Pe \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^{\frac{1}{6}} \bar{\varepsilon} \bar{\eta}, \quad (5.155)$$

которая получена в результате анализа опытных данных [103] и сопоставления этих данных с теоретическими расчетами [78, 98].

В нашем случае: поправка на гидродинамический начальный участок  $\bar{\varepsilon}=1$ , коэффициент, учитывающий геометрию канала  $\bar{\eta}=1,12$ . С учетом этих величин из формулы (5.155) находим:

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = 1,378 \left( Pe \frac{h}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (5.156)$$

Расчет зависимости средних значений  $Nu$  от  $Pe \frac{h}{l}$  (рис. 40) показывает, что в интервале  $0,2 \leq \mu_f/\mu_w \leq 5$  зависимость (5.101) при  $i=1$  совпадает с формулой Б. С. Петухова (5.156) с точностью до  $\pm 7,0\%$ . Для более широкого интервала изменения  $\mu_f/\mu_w$  относительная погрешность увеличивается, что указывает



на необходимость повышения степени приближения ( $i$ ) для учета вязкости с изменением температуры.

На рис. 41 сопоставляется теоретическое решение Б. С. Петухова [78] с данными решения для канала малой длины. Кривые 1, 2 соответствуют среднему теплообмену при нагревании масла ТМ ( $\mu_f/\mu_w=5,56$ ), кривые 3, 4 –

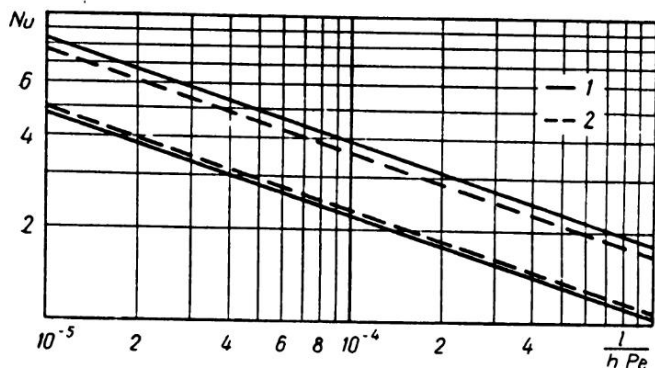


Рис. 40. Средняя теплоотдача при нагревании жидкости ( $\mu_f/\mu_w=5$ ) и охлаждении ( $\mu_f/\mu_w=0,2$ ). 1 – по (5.156), 2 – по (5.101) при  $i=1$

при охлаждении масла МК ( $\mu_f/\mu_w=0,017$ ). Как видно из рисунка, результаты данного расчета располагаются несколько ниже результатов работы [78].

2.  $q_w = \text{const}$ . В этом случае проведен сравнительный анализ [80] результатов решений, при которых для температурного распределения использовались полиномы второй, третьей и четвертой степени. Случай  $b_1=b_2=0$  (или  $\beta=1$ ) соответствует изотермической задаче, имеющей точное решение [73]. Это обстоятельство позволяет сравнить результаты решений полиномов различной степени с точным решением. Так, например, обычный интеграл

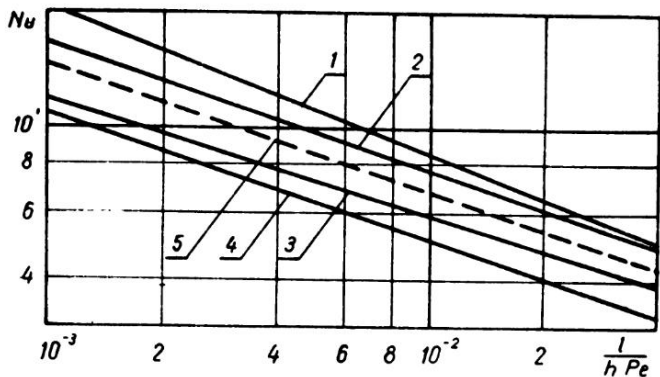


Рис. 41. Зависимость  $Nu = f(l/hPe)$  по теоретическому расчету при нагревании трансформаторного масла и охлаждении масла МК. 1, 3 – по данным [78], 2, 4, – по (5.101) при  $\beta_i=1$ , 5 по (5.101) при  $\beta=1$

ный метод или первое приближение при использовании полинома второй степени для температурного распределения дает решение:

$$Nu_x^3 = 2 Pe \frac{h}{x} \left(1 - \frac{0,8}{Nu_x}\right). \quad (5.157)$$

Используя полином третьей степени, имеем:

$$Nu_x^3 = \frac{27}{20} Pe \frac{h}{x} \left(1 - \frac{0,625}{Nu_x}\right), \quad (5.158)$$

а применяя полином четвертой степени для начального термического участка, получаем уравнение (5.121).

Наконец, точное решение [73] для плоского канала малой приведенной длины ( $\bar{X} \leq 0,001$ ) представляется уравнением

$$Nu_x = 1,183 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.159)$$

Как видно из рис. 42 и табл. 19, использование полинома четвертой степени для температурного распределения дает хорошее совпадение результатов с результатами точного решения, за исключением конца начального термическо-

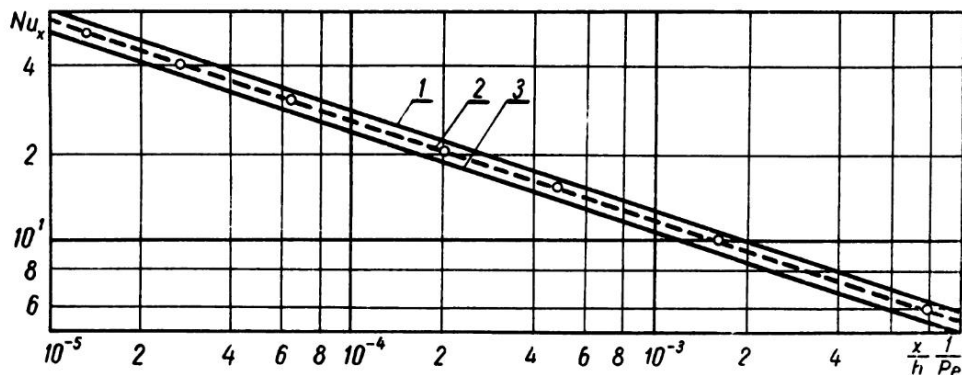


Рис. 42. Зависимость  $Nu_x = \varphi(x/hPe)$  по теоретическому расчету при различных полиномах для температурного профиля в случае  $\mu = \text{const}$ . 1 — по (5.157), 2 — по (5.121), 3 — по (5.158), точки — по (5.159)

го участка, на который точное решение не распространяется. Полиномы второй и третьей степени дают заметное расхождение результатов (табл. 19).

Для области с установившимся теплообменом в случае постоянных физических свойств из уравнений (5.131), (5.132) и (5.139) получаем  $Nu = 70/17 \approx 4,12$ , что полностью согласуется с точным решением Л. Янсена [72].

Таблица 19

Зависимость  $Nu_x$  от выбранного температурного распределения в случае  $q_w = \text{const}$ 

Полином	$Nu_x$	Расхождение в % по сравнению с [73]
$\vartheta = \frac{\Delta}{2} (1 - 2\bar{\xi} + \bar{\xi}^2)$	$Nu_x = 1,260 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	+6,5
$\vartheta = \frac{2}{3} \Delta \left( 1 - \frac{3}{2} \bar{\xi} + \frac{1}{2} \bar{\xi}^2 \right)$	$Nu_x = 1,105 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	-6,6
$\vartheta = \frac{\Delta}{2} (1 - 2\bar{\xi} + 2\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^3)$	$Nu_x = 1,170 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	-1,1
Точное решение [73]	$Nu_x = 1,183 \left( Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$	0,0

Кроме данного расчета проведен расчет [81] для нагревания глицерина в случае  $q_w = \text{const}$  при следующих параметрах:  $T_f = 60^\circ\text{C}$ ,  $\mu_f = 705 \cdot 10^{-4} \text{н} \times \text{сек}/\text{м}^2$ ,  $\lambda_f = 0,284 \text{вт}/\text{м} \cdot \text{град}$ ,  $Pr_f = 635$ ,  $q_w = 2,5 \cdot 10^4 \text{вт}/\text{м}^2$ ,  $h = 150 \text{мм}$ . В расчете использован гиперболический закон изменения вязкости от температуры  $\mu = \mu_f / (1 + b_1 \vartheta)$ . Согласно опытной кривой для глицерина в интервале температур от 60 до 160°C постоянный параметр  $b_1 = 600$ . При известном  $b_1$  по формулам (5.112), (5.130), (5.119) и (5.118) находим величины  $\bar{X} = x/hPe$ ,  $\vartheta_w$ , а также величину  $Nu_1$ , соответствующую первому приближению, и  $Nu_2$  — второму приближению.

Как видно из рис. 43, кривые 3 и 4 указывают на существенное влияние зависимости вязкости от температуры на теплообмен. Разница между значениями  $Nu$ , вычисленными улучшенным интегральным методом с учетом изменения вязкости и значениями  $Nu$  при постоянной вязкости, составляет около 80%. По табл. 20 и рис. 43 также можно сравнить второе приближение с первым приближением. В среднем значения  $Nu_2$  на 7% выше значений  $Nu_1$ . Кривые 3 и 4 вначале идут параллельно кривым 1, 2 (при значениях  $x/hPe \leq 10^{-4}$ ), а затем по мере нарастания толщины теплового пограничного слоя их уклон постепенно увеличивается. Такой характер изменения кривых 3 и 4 полностью подтверждает результаты теоретического решения [78].

Кривая 2, вычисленная с учетом изменения вязкости от температуры по формуле (5.147) при  $i=1$ , располагается значительно ниже кривых 3, 4 и только частично отражает влияние зависимости вязкости от температуры на теплообмен. Объясняется это тем, что при большом соотношении вязкостей ( $\mu_f/\mu_w \approx 23 > 5,0$ ) поправочный коэффициент  $\beta_{i=1}$  принимает заниженные

Таблица 20

Значения зависимостей  $Nu_x$  от  $\bar{X}$  для глицерина при  $q_w = \text{const}$ 

$\Delta$	$X \cdot 10^6$ по (5.112)	$\vartheta_w$ по (5.130)	$Nu_1$ по (5.119)	$Nu_2$ по (5.118)	$\frac{Nu_2 - Nu_1}{Nu_1} \cdot 100$ %
0,01	0,0568	0,0047	400	422	5,62
0,02	0,678	0,0094	200	213	6,45
0,05	16,61	0,0233	80	85,8	7,20
0,10	137,2	0,0465	40	43,0	7,53
0,20	812	0,0929	20	21,5	7,70
0,50	6450	0,233	8	8,57	7,13
0,80	18390	0,381	5	5,25	5,00
1,00	30720	0,488	4	4,10	2,50

значения. Необходимо также отметить, что за исходное температурное уравнение для кривой 2 принята парабола второй степени, а для кривых 3 и 4 — парабола четвертой степени.

В табл. 6 приложений приведены данные расчета изменения безразмерной температуры  $\vartheta$  в начальном термическом участке, полученные при использовании обыкновенного и улучшенного интегральных методов.

Из табл. 6 приложений отчетливо видна разность в значениях  $\vartheta$  первого и второго приближений, которая на стенке составляет около 7%, а с удале-

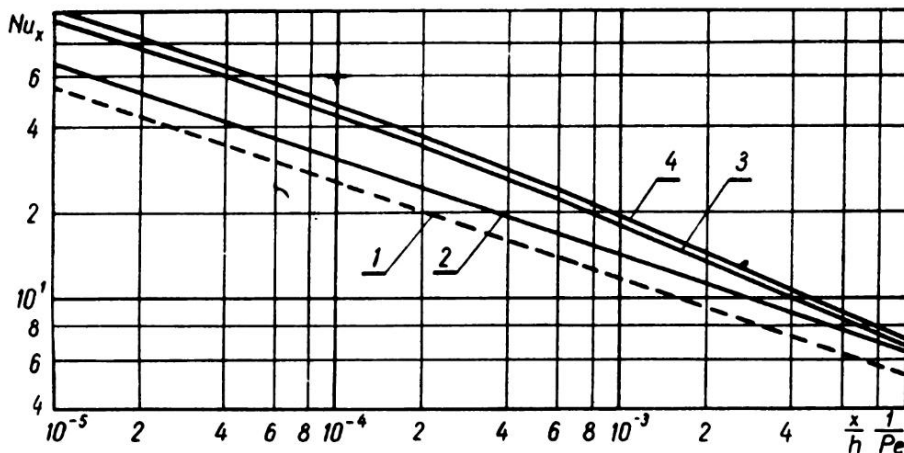


Рис. 43. Зависимость  $Nu_x = \varphi(x/hPe)$  по теоретическому расчету при нагревании глицерина в случае  $q_w = \text{const}$ . 1 — по (5.159), 2 — по (5.147) при  $i=1$ , 3 — первое приближение по (5.119), 4 — второе приближение по (5.118)

нием от стенки становится величиной переменной. Температура стенки по второму приближению меньше температуры стенки по первому приближению ( $\vartheta_{w_2} < \vartheta_{w_1}$ ), а в связи с этим получаем, что  $Nu_2 > Nu_1$  (см. табл. 20 и рис. 43).

На рис. 44 приведены графики изменения безразмерной температуры  $\vartheta$  в области с установившимся теплообменом при нагревании глицерина переменной вязкости ( $b_1=600$ ). Согласно табл. 20 начало этой области соответству-

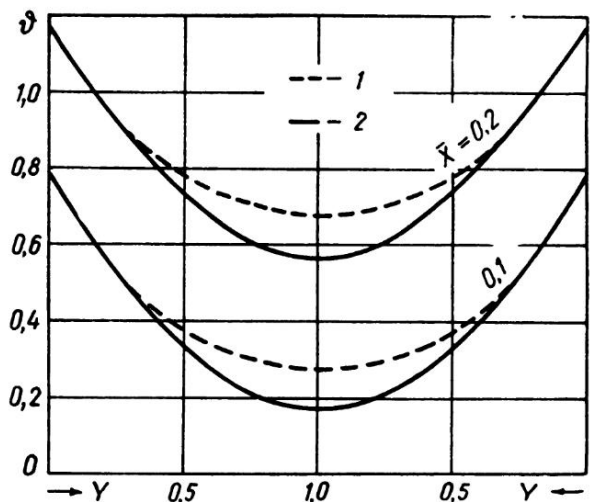


Рис. 44. Распределение безразмерной температуры  $\vartheta$  в области с установившимся теплообменом при нагревании глицерина в случае  $q_w = \text{const}$ . 1 — первое приближение по (5.137), 2 — второе приближение по (5.139)

ет значению  $\bar{X} = x/hPe = 0,031$ . Рассчитанные температурные профили соответствуют значениям приведенной длины  $\bar{X} = 0,1$ ;  $0,2$  и явно отражают подобие температурных распределений для этой области в различных сечениях вдоль канала.

Из рис. 44 также отчетливо видна разность в значениях  $\vartheta$  первого и второго приближений. Как видно, температура жидкости в центре канала ( $Y=1$ ), вычисленная по второму приближению, уменьшается по сравнению с той же температурой, вычисленной по первому приближению.

**3. Влияние неизотермичности поверхности на теплоотдачу.** На рис. 45 показаны распределения безразмерной температуры стенки  $\vartheta_w$ , средней массовой температуры жидкости  $\vartheta_m$  и температуры жидкости в центре канала  $\vartheta_{Y=1}$  по длине плоского канала при  $q_w = \text{const}$ . Для этого графика использовались данные табл. 20 и табл. 7 приложений, а также выражение  $\vartheta_m = 4\bar{X}$ .

Анализ теплоотдачи пластины в главе 3 показал, что неизотермичность

поверхности оказывает значительное влияние на теплоотдачу. Аналогичное явление наблюдается и при гидродинамически установившемся течении в канале. Из рис. 46 видно, что теплоотдача в начальном термическом участке канала при  $q_w = \text{const}$  примерно на 20% выше теплоотдачи изотермической

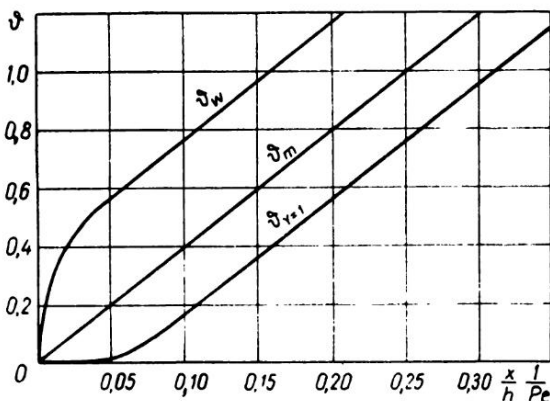


Рис. 45. Распределение безразмерной температуры  $\theta$  в зависимости от  $x/hPe$  в потоке глицерина переменной вязкости в случае  $q_w = \text{const}$

поверхности как при нагревании, так и при охлаждении жидкости. Эти цифры вычислены для значений  $\mu_f/\mu_w$ , равных 10 и 0,1.

При переменных физических свойствах жидкости число  $Nu_x$  изменяется по длине и в области с установившимся теплообменом, но гораздо слабее, чем в термическом начальном участке.

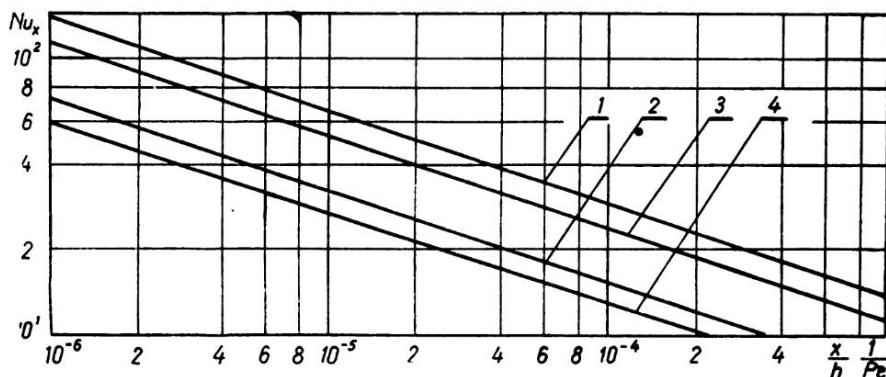


Рис. 46. Сравнение местной теплоотдачи при  $T_w = \text{const}$  и  $q_w = \text{const}$  в случае  $\mu_f/\mu_w = 10$  и  $\mu_f/\mu_w = 0,1$ . 1, 3 — по (5.147)  $q_w = \text{const}$ , 2, 4 — по (5.100)  $T_w = \text{const}$

Независимо от значения  $\gamma$  или  $b_1$  при  $\bar{X} \rightarrow \infty$  число  $Nu$  в случае  $q_w = \text{const}$  стремится к асимптотическому значению 4,12, которое соответствует случаю при постоянных физических свойствах, а при  $T_w = \text{const}$  — к 3,75.

# 6 Методика экспериментальных исследований

С целью проведения экспериментальных исследований гидродинамических особенностей обтекания и теплоотдачи в потоках вязких жидкостей были созданы специальные установки, а также разработаны методы исследования.

Более полное определение влияния рода жидкости на теплоотдачу потребовало охватить широкий интервал чисел  $Pr$ . Поэтому при экспериментальном исследовании применялись различные жидкости: воздух, вода, трансформаторное масло и глицерин. Изменение температуры рабочей жидкости от 10 до 60°C дало возможность охватить интервал чисел  $Pr$  от 3 до 8 в потоке воды и от 100 до 580 — в потоке трансформаторного масла. В потоке глицерина температура изменялась от 60 до 100°C, а число  $Pr$  — от 130 до 600. Значительное изменение вязкости позволило выполнить исследования в широком интервале чисел  $Re$ , а именно: от 10 до  $10^5$ .

Опыты, проведенные в потоке воздуха, дали возможность сопоставить данные, полученные в начальной стадии, с известными результатами других исследователей. Сопоставление данных указало на безупречность работы отдельных узлов и установок в целом, а также на правильность выбранной методики.

Экспериментальные исследования в основном были направлены на изучение местной и средней теплоотдачи пластины, начального участка параллельных пластин, а также плоского канала при установившемся режиме течения. Изучено влияние граничных условий на теплоотдачу, при этом исследования осуществлялись при  $q_w = \text{const}$ ,  $T_w = \text{const}$ . Здесь в основном внимание было сосредоточено на исследовании влияния неизотермичности поверхности на процесс теплообмена.

Особое внимание уделялось определению влияния изменения физических свойств жидкости или температурного напора на теплообмен. В этих экспериментах при приблизительно постоянных характеристиках осуществляемого режима менялась тепловая нагрузка, а в некоторых экспериментах — и направление тлевого потока.

Наряду с исследованием теплоотдачи изучались и такие гидродинамические характеристики, как гидравлическое сопротивление и распределение скоростей.

При обработке экспериментальных данных необходимо точно знать физические свойства рабочих жидкостей. Для воды и воздуха эти свойства брались из работы [24], а для трансформаторного масла и глицерина определялись экспериментально. Физические свойства всех использованных теплоносителей представлены в таблицах 8–11 приложений.

При разработке методики исследования, создании экспериментальных моделей пластин и каналов учитывались рекомендации и указания, содержащиеся в работах [104, 105].

## 6.1. Экспериментальная установка

Для экспериментальных исследований были использованы три тождественных замкнутых гидродинамических контура. В первом из них циркулировала вода или воздух, во втором — трансформаторное масло, а в третьем — глицерин.

Принципиальная схема контура приведена на рис. 47. Жидкость из бака емкостью  $2 \text{ м}^3$  подавалась насосом в успокоительный участок сечением  $300 \times 300 \text{ мм}$ . Необходимый расход жидкости для осуществления определенного

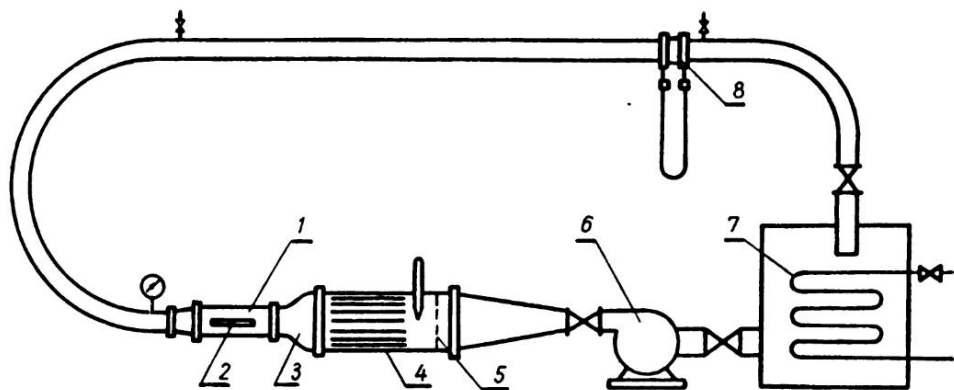


Рис. 47. Схема экспериментальной установки. 1 — экспериментальный участок, 2 — исследуемая пластина или блок параллельных пластин, 3 — конфузор, 4 — успокоительный участок, 5 — решетка, выравнивающая скорость, 6 — насос, 7 — бак, 8 — нормальная диафрагма

режима устанавливался при помощи задвижки, смонтированной за насосом. В зависимости от интервала чисел  $Re$  использовались 3 различных центробежных насоса среднего давления производительностью от 9 до  $120 \text{ кг/сек}$ . При проведении опытов с воздухом вместо насоса к контуру подключалась воздуходувка.

В успокоительном участке находились сетка для выравнивания поля скоростей и решетка из продольных тонкостенных труб для гашения крупномасштабной турбулентности. Из этого участка через плавное суживающийся лемнискатный конфузор жидкость попадала в рабочий участок, где были установлены исследуемые пластины. В зависимости от конструкции пластины использовались рабочие участки с поперечными сечениями каналов  $100 \times 200$  и  $150 \times 150 \text{ мм}$ . Пластины устанавливались обычно на расстоянии 1–2 гидравлических диаметров рабочего канала.

При различных расходах жидкости поля скоростей перед исследуемыми пластинами проверялись трубками Пито, а при малых скоростях — терми-



сторными термоанемометрами. Измерения показали, что во всех экспериментах профили скоростей были прямолинейными.

Из рабочего участка жидкость по трубе диаметром 100 мм сливалась обратно в бак. На прямом участке этой трубы были установлены нормальные диафрагмы для измерения расхода жидкости. Необходимая точность определения расхода жидкости в широких пределах обеспечивалась нормальными диафрагмами при строгом соблюдении нормативов, приведенных в [106]. Использовались диафрагмы с отверстиями следующих диаметров: 70, 30, 22,5 мм. Кроме того, для определения очень малых расходов применялись сдвоенные диафрагмы с отверстиями диаметром 16,7; 23,7 мм. Эти диафрагмы устанавливались на специально смонтированном прямом участке труб диаметром 53 мм. Сдвоенные диафрагмы были протарированы при малых расходах жидкости, что показало достаточную их точность.

По определенному таким образом расходу жидкости рассчитывалась скорость в экспериментальном участке над исследуемыми пластинами, а также в плоском канале. При определении скорости принималось во внимание затенение пластинами живого сечения канала эксперимента. Измерения показали, что при низких температурах и малых скоростях трансформаторного масла необходим учет влияния образования пограничных слоев на стенках канала. Величина поправки определялась по данным измерения профилей скорости в канале.

В связи с диссипацией кинетической энергии циркулирующая в контуре жидкость нагревалась. Постоянная температура циркулирующего потока поддерживалась с помощью теплообменника, вмонтированного в бак. В баке были установлены специальные перегородки, способствующие успокоению течения жидкости и удалению попадающего в контур воздуха.

**Экспериментальные участки.** Для проведения намеченного комплекса исследований теплоотдачи и гидродинамических характеристик пластины

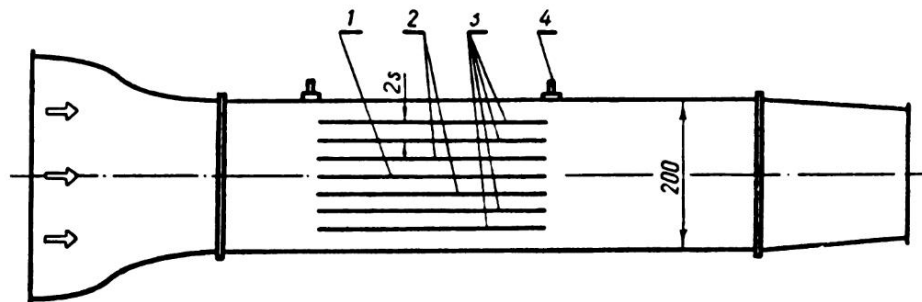


Рис. 48. Экспериментальный участок для исследования теплоотдачи пластины и начального участка параллельных пластин. 1 — исследуемая пластина, 2 — обогреваемые неисследуемые параллельные пластины, 3 — необогреваемые параллельные пластины, 4 — отбор статического давления

и начального участка параллельных пластин использовались три экспериментальных участка. Два из них, как наиболее характерные, представлены на рис. 48, 49. Это металлические каналы, снабженные стенками из органического стекла, через которые можно вести визуальные наблюдения за процессами.

Экспериментальный участок, показанный на рис. 48, использовался как для исследования теплоотдачи одиночной пластины, так и для исследования начального участка параллельных пластин. В других экспериментальных участках исследовались только одиночные пластины. Всего в экспериментах было использовано 5 пластин, различных по конструкции и назначению.

При проведении опытов по исследованию начального участка параллельных пластин указанные пластины собирались в блок согласно заданному расстоянию между ними (см. рис. 48). Измерительной пластиной служила пластина № 3, окруженная с обеих сторон такими же обогреваемыми пластинами, однако на них не проводились измерения. Остальные пластины не обогревались и служили лишь для равномерного заполнения сечения канала. С целью получения „бесконечного“ потока крайние пластины устанавливались на расстоянии, равном полному расстоянию между пластинами  $2s$ , или же его половине  $s$ .

В потоках воздуха и воды нами были исследованы каналы высотой  $2s=10$ , 20 мм, а в потоке трансформаторного масла — высотой  $2s=4$ , 10, 20, 50 мм. Длина всех каналов равнялась 212 мм. Скорость в потоке воздуха изменя-

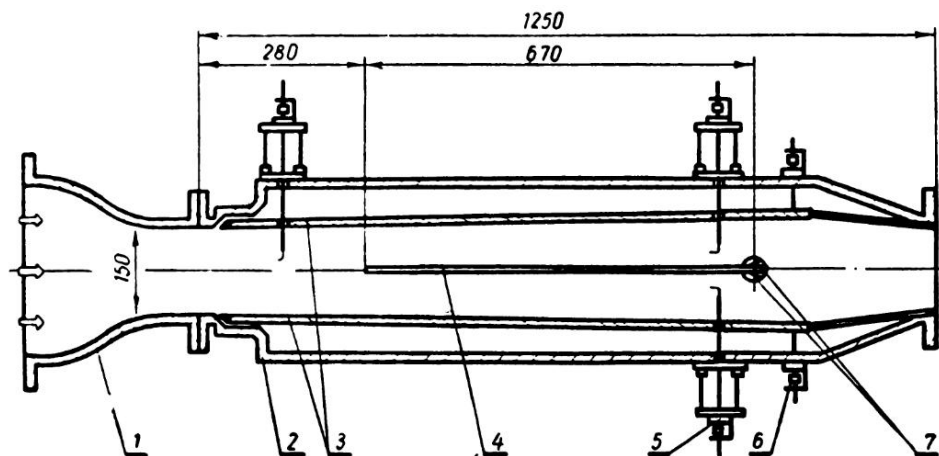


Рис. 49. Экспериментальный участок для исследования теплоотдачи пластины № 1. 1 — конфузор, 2 — экспериментальный канал, 3 — подвижные стенки канала, 4 — пластина, 5 — координатник насадки, служащей для измерения скорости, 6 — механизм для перемещения стенок канала, 7 — контакты пластины

лась от 1,5 до  $\sim 10$  м/сек, а в потоках воды и трансформаторного масла — от 0,1 до 0,4 м/сек.

Следует обратить внимание на экспериментальный участок (рис. 49), в котором производились исследования теплообмена при использовании пластины № 4. Он отличался тем, что стенки, параллельные плоскости пластины, в нем были подвижными. Специальной регулировкой стенки можно

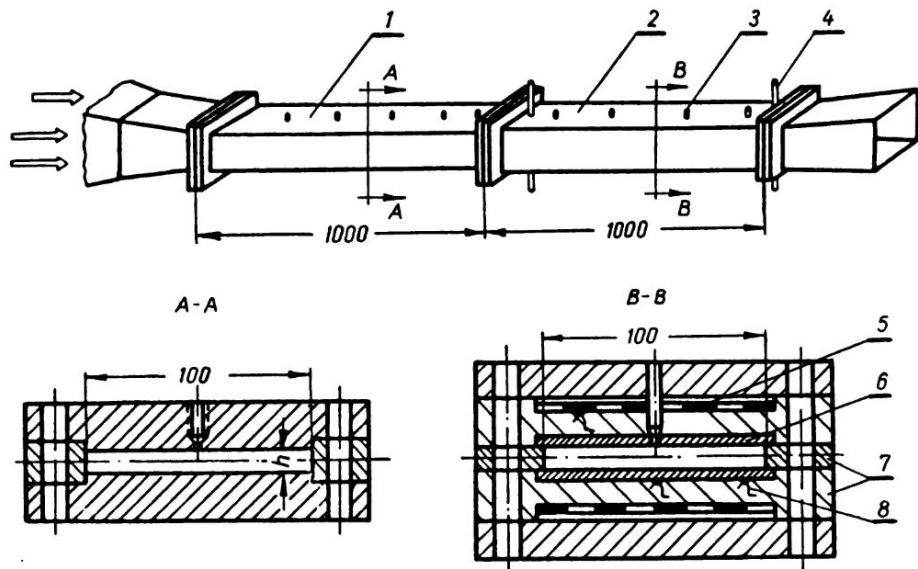


Рис. 50. Экспериментальный участок для исследования теплоотдачи и гидравлического сопротивления плоского канала. 1 — необогреваемая часть канала, 2 — обогреваемая теплообменная часть канала, 3 — отбор статического давления, 4 — контакт, 5 — компенсационный нагреватель, 6 — обогреваемая пластина из нержавеющей стали, 7 — гетинаксовая пластина и вкладыш, 8 — термопары

было поставить так, чтобы образующийся между ними и плоскостью пластины угол раствора исключал влияние градиента давления.

Угол раствора стенок канала определялся по измерениям скорости потенциального потока. При экспериментах необходимо было отрегулировать угол между стенками так, чтобы скорость потенциального потока по всей длине исследуемой пластины была постоянной.

Экспериментальный участок (рис. 50) для исследования теплообмена плоского канала при установившемся режиме по своей конструкции отличался от вышеупомянутых. Он состоял из двух частей. Одна из них была необогреваемой и служила для образования стабилизированного режима течения. Другая часть обогревалась, на ней проводились измерения теплоотдачи.

## 6.2. Определение теплоотдачи

Экспериментально определялась как местная, так и средняя теплоотдача. Коэффициент местной теплоотдачи пластины подсчитывался согласно уравнению:

$$\alpha_x = \frac{q_w}{t_{wx} - t_f} \quad (6.1)$$

В этом уравнении  $q_w$  — удельный тепловой поток на поверхности, экспериментально определенный с помощью пластин-калориметров.

Коэффициент средней теплоотдачи подсчитывался по уравнению:

$$\alpha_m = \frac{q_w}{t_w - t_f} \quad (6.2)$$

Температура поверхности  $t_w$  является средней интегральной температурой участка пластины, на котором осреднялась теплоотдача.

Кроме принятого нами метода обобщения данных, существует ряд других методов осреднения теплоотдачи. На особенностях этих методов более подробно остановимся в последующих разделах.

**1. Пластины-калориметры для определения теплоотдачи.** Основные данные пластин представлены в табл. 21. Для всех пластин, за исключением пластины № 5, представляющей собой водяной калориметр, был использован метод электрического калориметрирования.

Пластины № 1, 2 изготовлялись из силико-никелевой фольги толщиной 0,1 мм и были предназначены для определения средней теплоотдачи. Измерение температуры осуществлялось с помощью термопар, расположенных

Таблица 21

Основные характеристики исследуемых пластин

№ пластины	Длина, мм	Обогреваемая длина, мм	Толщина, мм	Ширина измерительного участка пластин, мм	Граничное условие	Сечение канала экспериментального участка, мм
1	10,3	10,3	0,65	40	$T_w \approx \text{const}$	200 × 100
2	50,3	50,3	0,65	40		200 × 100
3	212	212	2,0	40	$q_w \approx \text{const}$	200 × 100
3а	212	120	2,0	40	$q_w \approx \text{const}$	200 × 100
3б	212	30,3	2,0	40	$q_w \approx \text{const}$	200 × 100
4	640	640	2,0	135	$q_w = \text{const}$	144 × 144
5	188	188	10	110	$T_w = \text{const}$	150 × 150

на определенном расстоянии (см. рис. 51) от передней кромки. Приклеенные к внутренней поверхности пластины головки термопар изолировались микрослоем слюды, толщиной 0,03 мм.

К внутренней поверхности припаивались также и контакты для определения падения напряжения на измерительном участке, изготовленные из мед-

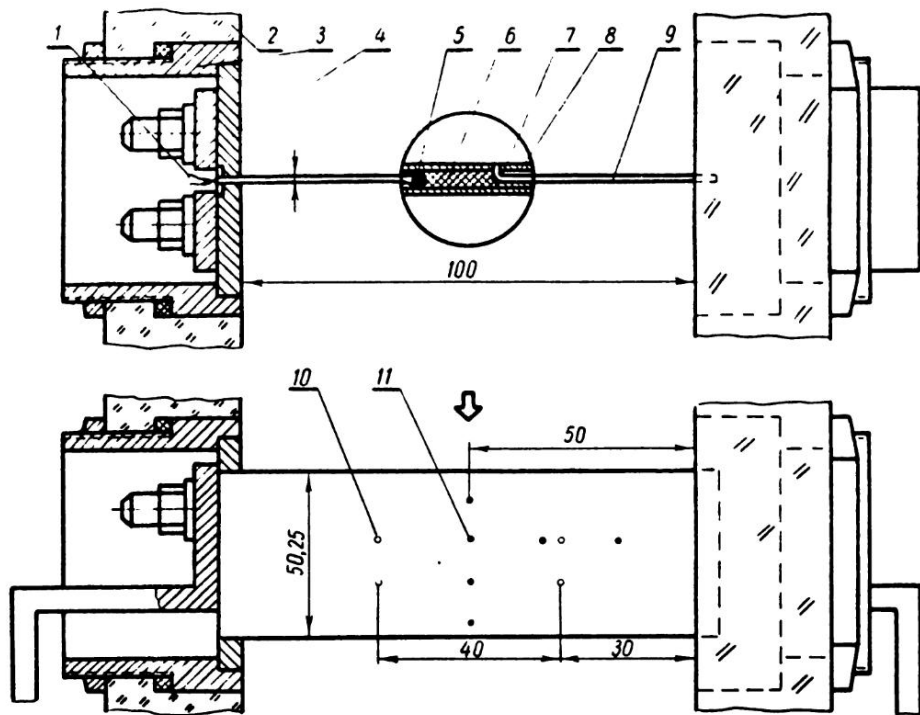


Рис. 51. Пластина (№ 2) электрического калориметрирования. 1, 11 — термопары, 2 — стенка канала из оргстекла, 3 — держатель контакта, 4 — медный контакт, 5 — спай термопары, 6 — слюда, 7 — потенциметрический провод для измерения падения напряжения, 8 — силико-никелевая фольга, 9 — пластина, 10 — контакт измерения падения напряжения

ной проволоки диаметром 0,15 мм. Для контроля равномерности температурного поля и концевых потерь тепла служили термопары, расположенные вне измерительного участка пластины. Концы пластины припаивались к медным контактам, запрессованным в стальные держатели. К контактам присоединялись токоподводящие шины.

Пластина № 3 (рис 52) являлась основной и отличалась более сложной

конструкцией. Она применялась при исследованиях местной и средней теплоотдачи, влияния необогреваемого начального участка, а также при определении теплоотдачи начального участка параллельных пластин. По длине она была секционирована на семь параллельных секций. Основной частью пластины служил гетинаксовый каркас, к обеим сторонам которого было приклеено

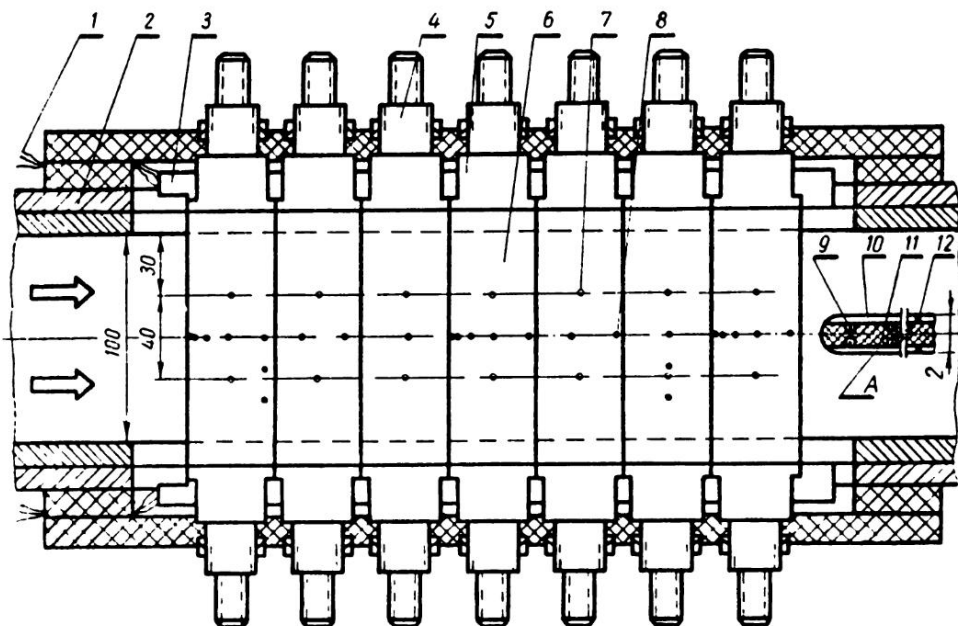


Рис. 52. Пластина (№ 3) электрического калориметрирования. 1 — провода термопар, 2 — стенка канала, 3 — канал для вывода термопар, 4 — медный контакт, 5 — гибкий контакт, 6, 10 — марганцевая полоска, 7 — контакты, 8 — термопары, 9 — спай термопар, 11 — гетинаксовый каркас, 12 — промежуток между полосками. А — продольный разрез пластины в области передней кромки

семь марганцевых полос-нагревателей толщиной 0,18 мм и шириной 30,3 мм. Эти марганцевые полосы и образовывали нагреваемую теплообменную поверхность пластины. Промежутки в 0,2 мм между полосами заполнялись клеем. В профрезованные в гетинаксовом каркасе канавки сечением 0,4 × 0,4 мм укладывались медь-константановые термопары диаметром 0,18 мм, изолированные эмалью и шелком. Спаи термопар плотно прижимались к внутренней поверхности полос и изолировались от нее микрослоем клея. Контакты диаметром 0,25 мм для определения падения напряжения на измерительном участке пластины тщательно припаивались к каждой секции, а медные потен-

циометрические провода диаметром 0,18 мм совместно с проводами термопар по общему каналу выводились к измерительной схеме.

На пластине № 3 проводилось исследование влияния начального необогреваемого участка на теплоотдачу. Это осуществлялось путем отключения трех (при  $l_0=92$  мм) или шести (при  $l_0=182$  мм) передних секций.

Измерительным участком на всех вышеприведенных пластинках служила лишь центральная часть пластин шириной 40 мм (см. рисунки 51, 52), что позволило исключить эффекты концевых утечек.

Для исследования местной теплоотдачи использовалась также пластинка № 4, установленная в специальном экспериментальном участке (рис. 49), позволяющем исключить влияние градиента давления изменением угла раствора боковых, параллельных пластинке, стенок канала. С помощью этой пластинки был проведен эксперимент при  $q_w = \text{const}$ . Пластинка № 4 была изготовлена из нержавеющей стали толщиной 0,05 м, приклеенной эпоксидной смолой к гетинаксу толщиной 1,5 мм. Медь-константановые термопары диаметром 0,07 м приваривались электроконтактным методом к внутренней стороне фольги и под ней выводились наружу. Эти же термопары использовались при измерении падения напряжения. Контакты для подвода обогреваемого тока припаивались к фольге. Пластинка в канале устанавливалась в направляющих канавках, сделанных в органическом стекле на стенках канала. Пластинки № 3 и № 5 изготавливались из материалов малой теплопроводности (для гетинакса, например,  $\lambda=0,23$  вт/м·град, а для манганина и нержавеющей стали —  $\lambda \approx 20$  вт/м·град) с низким термическим коэффициентом сопротивления (0,001–0,00004 1/°C) и высокой степенью равномерности (0,001 мм) толщины фольги и полос. Выбранные конструкции пластин позволяли получить различные степени неизотермичности поверхности при постоянном тепловом потоке: от  $n_1=0,4$  до  $n_1=0,5$ .

Пластинка № 5 (рис. 53) относится к классу калориметров водяного калориметрирования. Ее применение позволило получить граничное условие на стенке  $T_w = \text{const}$ . Пластинка состояла из 15 отдельных охлаждаемых или обогреваемых водой секций шириной 12 мм. Секции пластинки изготавливались из меди и изолировались между собой гетинаксовыми прокладками толщиной 0,5 мм. Для измерения температуры в верхней и нижней стенках в середине каждой секции под тонкой медной полоской были зачеканены термопары. Контроль температурного поля поверхности осуществлялся посредством термопар, расположенных по краям пластинки. Секции питались из установленного на высоте 2,5 м над пластиной сосуда с постоянным уровнем термостатированной воды. Расход калориметрической воды определялся взвешиванием с точностью до 1г, а перепад ее температуры на входе и выходе измерялся пятью спаянными дифференциальными термопарами, помещенными в полихлорвиниловых трубах диаметром 2 мм, спаи которых размещались на расстоянии 110 мм. Для лучшего перемешивания воды в секциях устанавливались системы перегородок.

**2. Теплоотдача начального участка параллельных пластин.** Для исследования местной и средней теплоотдачи начального участка параллельных пластин использовалась, как было указано выше, пластина № 3, которая устанавливалась в блоке пластин.

Выбранные высоты каналов обеспечивались установкой соответствующих прямоугольных гетинаксовых или стальных стержней между пластинами.

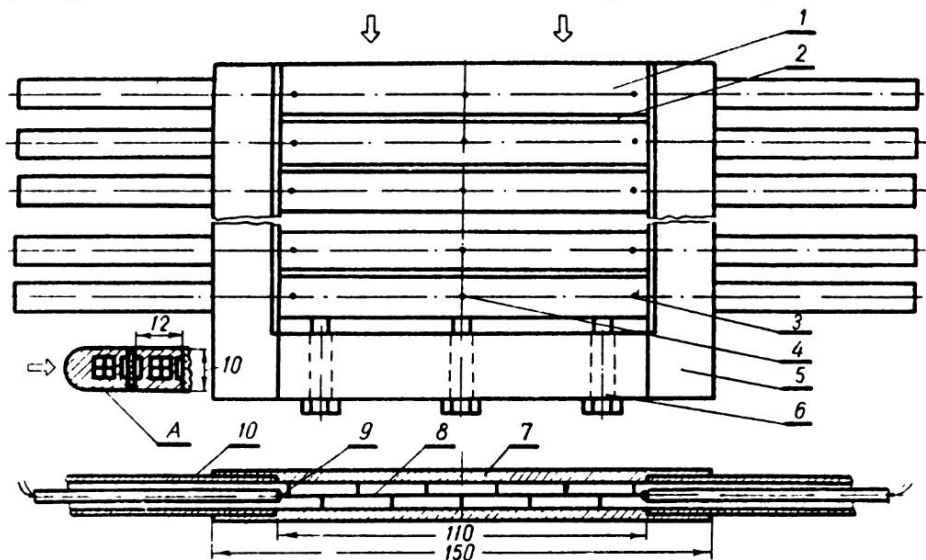


Рис. 53. Пластина водяного калориметрирования. 1 — секция пластины, 2 — гетинаксовые прокладки, 3 — боковые термопары, 4 — основные термопары, 5 — стягивающая стальная лента, 6 — стягивающие болты, 7 — медная стенка секции, 8 — система перегородок, 9 — дифференциальная термопара, 10 — трубка для подвода или отвода калориметрической воды. А — продольный разрез пластины в области передней кромки

Эксперименты проводились в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла при постоянном тепловом потоке ( $q_w = \text{const}$ ) на стенке канала. Коэффициенты теплоотдачи определялись по формулам (6.1) и (6.2).

**3. Теплоотдача плоского канала при стабилизированном режиме течения.** Исследования проводились в потоке трансформаторного масла и воды при двух высотах канала  $2s = 10,2$  и  $5,4$  мм. Длина обогреваемой части была равна 1 м (см. рис. 50). Весь экспериментальный участок изготовлялся из стали, покрытой хромом во избежание коррозии. Теплообменные поверхности были изготовлены из нержавеющей стали толщиной 1,5 мм, которая крепилась к гетинаксовой пластине толщиной 20 мм. Со стороны гетинакса к нержавеющей стали приваривались медь-константановые термопары, которыми измерялась температура теплообменной поверхности. Ввиду значительной



толщины нержавеющей стали и того, что термопары были приварены со стороны, противоположной омываемой, учитывалось искажение действительной температуры поверхности. Термопары были расположены на верхней и нижней стенках в середине канала.

С целью исключения влияния шагового напряжения эдс термопар определялась как среднее арифметическое двух измерений при различных направлениях электрического тока.

Для подвода обогревающего тока к обоим концам пластины были припаяны медные контакты. Пластины верхней и нижней стенок канала были соединены в одну последовательную электрическую цепь. Для уменьшения теплотерь в окружающую среду основания обогреваемых пластин были изготовлены из гетинакса. Кроме того, с противоположной стороны гетинакса были установлены компенсационные нагреватели, секционированные на 4 секции по длине канала. Необходимый ток в компенсаторах регулировался с помощью автотрансформаторов и реостатов. Эксперименты проводились только при симметричном обогреве канала.

Для определения количества тепла, утекающего в окружающую среду, или регулирования компенсационных нагревателей использовались уложенные под ними термопары. Утечка тепла из опытного участка определялась как расчетным, так и экспериментальным путем.

Определение количества тепла, утекающего в окружающую среду, осуществлялось расчетным путем. При этом использовались законы теплопроводности и данные измерения температуры по обеим сторонам гетинаксовой пластины (см. рис. 50). Температура измерялась основными и компенсационными термопарами, уложенными под компенсационными нагревателями. Показания этих же термопар использовались для регулировки компенсационных нагревателей при определении тепловых потерь опытным путем. Температура теплообменной поверхности измерялась 20 основными и 9 контрольными термопарами. Для компенсационных целей использовалось 20 термопар.

Распределения температур на нижней и верхней стенках канала были одинаковыми, поэтому при обработке результатов применялись показания термопар, расположенных только на нижней стенке.

**4. Общие вопросы измерений.** Температура потока  $t_f$  во всех экспериментах измерялась медь-константовыми термопарами и дублировалась лабораторным термометром с ценой деления в  $0,1^\circ\text{C}$ .

Температура поверхности измерялась медь-константовыми термопарами, которые соприкасались с теплообменной поверхностью или же были приварены с внутренней ее стороны. Погрешности [104] измерений температуры по приведенной толщине стенки при максимальном тепловом потоке не превышали 1%. Эдс термопар измерялась компенсационным методом с помощью гальванометра ГЭС-47 и потенциометра типа Р-375. Измерения температуры пластин №№ 3 и 4 проводились на верхней и нижней стенках. В сечениях,

находящихся на одинаковом расстоянии от передней кромки пластины, расхождения в температурных измерениях не обнаружено, что свидетельствует о правильности установки пластины в канале, а также точности ее как калориметра. Ввиду того, что показания термопар верхней и нижней стенки пластины в опытах совпадают, измерения проводились только термопарами, размещенными на верхней поверхности. При определении средней теплоотдачи средняя температура поверхности определялась графическим интегрированием местных эдс термопар.

При проведении исследований с пластинами, на которых термопары были приварены к электрообогреваемой постоянным током поверхности (пластина № 4 и пластины плоского канала), для исключения влияния шагового напряжения эдс термопар определялась как средняя арифметическая величина двух измерений, осуществленных при различных направлениях обогревающего электрического тока.

Тепловой поток на теплообменной поверхности пластин и каналов определялся по формуле:

$$q_w = \frac{I \Delta U}{F}, \quad (6.3)$$

где  $I$  – сила тока,  $\Delta U$  – падение напряжения на измерительном участке,  $F$  – расчетная, теплоотдающая поверхность. Сила тока измерялась с помощью шунтов ШС-75, установленных в цепи каждой секции пластины № 3. При измерениях на других пластинах использовался один шунт. Падение напряжения  $\Delta U$  на измерительных участках пластин и на шунтах определялось компенсационным методом с помощью потенциометра. Эти измерения дублировались вольтметром типа М-106 класса 0,5.

При больших тепловых нагрузках теплообменные поверхности обогревались униполярной машиной с силой тока 20 000 а и напряжением 5 в, а также генератором АС-50, при средних – выпрямителями со стабилизаторами.

В случае использования водяной калориметрической пластины участвующее в теплообмене количество тепла определялось по формуле:

$$q_w = \frac{G c_p (t_1 - t_2)}{F}, \quad (6.4)$$

где  $G$  – количество протекающей калориметрической воды, а  $(t_1 - t_2)$  – температурный напор на входе и выходе секции пластины № 5.

### 6.3. Определение гидродинамических характеристик

Нами измерялись распределение скоростей в ламинарном пограничном слое и гидравлическое сопротивление на начальном участке параллельных пластин и в плоском канале при установившемся режиме течения.

Измерения распределения скорости в пограничном слое в потоке трансформаторного масла проводились в экспериментальном участке (рис. 54) сечением  $200 \times 200$  мм на пластине длиной 1100 мм. Начало нарастания пограничного слоя на пластине фиксировалось регулируемым отсосом жидкости. Скорость измерялась термисторным термоанемометром, установленным в точном координатнике на расстоянии 988 мм от передней кромки пластины. Методика измерения более подробно изложена в работе [107].

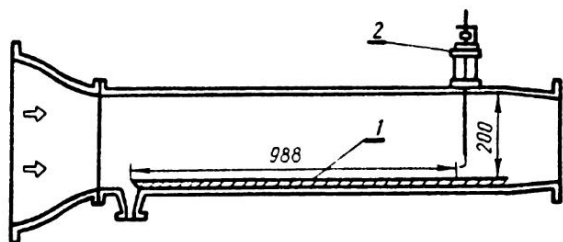


Рис. 54. Экспериментальный участок, в котором измерялось распределение скорости в пограничном слое. 1 — пластина, 2 — координатник с термисторным датчиком

Гидравлическое сопротивление в начальном участке определялось разностью статических давлений в экспериментальном участке перед блоком параллельных пластин и за ним (см. рис. 48). Перепад статических давлений определялся дифманометром и подсчитывался по формуле:

$$\Delta p = (\rho_h - \rho_i) h, \quad (6.5)$$

где  $\rho_h$  — плотность манометрической жидкости,  $\rho_i$  — плотность жидкости, находящейся в манометре над манометрической жидкостью,  $h$  — разность высот столбов манометрической жидкости.

В эксперименте использовались П-образные дифманометры и микроманометры ММН, соединенные резиновыми шлангами со штуцерами (см. рис. 48), которые сообщались с отборами статического давления, т. е. с отверстиями диаметром 0,6 мм, высверленными строго перпендикулярно внутренней поверхности стенки канала. Измерения проводились при изотермическом и неизотермическом режимах; разницы между ними не обнаружено.

Гидравлическое сопротивление плоского канала измерялось на необогреваемом и обогреваемом участках. Конструкция экспериментального участка позволяла вести измерения на небольших участках канала и следить за изменением сопротивления по длине этого канала.

Перепады статического давления определялись по уравнению (6.5), при этом в зависимости от скорости были использованы П- или U-образные дифманометры, соединенные через шланги с дренажными отверстиями диаметром 0,5 мм, просверленными в верхней стенке канала (см. рис. 50). По всей длине экспериментального участка с интервалами в 15–20 см было сделано 9 таких дренажных отверстий.

Измерения проводились в большом интервале изменения скорости (от 0,10 до 13,0 м/сек) как при изотермическом, так и при неизотермическом режимах. Необходимо отметить, что гидравлическое сопротивление зависит от термических условий в канале. С увеличением температуры стенок канала сопротивление уменьшается.

#### 6. 4. Особенности проведения опытов

В первоначальной стадии экспериментов во всех опытных участках проверялась равномерность распределения скорости в каналах. Проверка производилась как по высоте, так и по ширине канала на расстоянии  $\sim 1-2$  гидравлических диаметров канала от входа. В зависимости от величины скорости измерения осуществлялись пневмометрическими трубками или термисторным термоанемометром. Только после этих исследований в экспериментальный участок были вмонтированы пластины, намеченные для экспериментов. Такая проверка равномерности профиля скорости не проводилась для плоского канала.

Все эксперименты по исследованию теплообмена и гидравлические измерения проводились обычно в такой последовательности: в потоке воздуха, затем в потоке трансформаторного масла и в последнюю очередь в потоке воды. При переходе в опытах от потока масла к потоку воды экспериментальный участок очень тщательно промывался бензином и очищался во избежание образования на теплообменных поверхностях пленок эмульсии, существенно искажающих интенсивность теплообмена.

Все исследования проводились при стационарном режиме. Обычно температура потока поддерживалась постоянной, а скорость потока измерялась в определенных интервалах. При одной и той же скорости проводились исследования в условиях различных температурных напоров или тепловых нагрузок. Температурный напор в зависимости от направленности эксперимента изменялся от 2 до 60°C.

Иногда проводились специальные эксперименты. Определялось, например, влияние температурного напора или скорости на процесс теплоотдачи. В первом случае при постоянной скорости изменялся температурный напор.

Нужно отметить, что при экспериментах в потоке воды при больших перепадах напряжения и непосредственном обогреве поверхности постоянным электрическим током возможны эффекты электролиза. В наших экспериментах такого явления не наблюдалось.

При анализе методики измерений, аппаратуры, интервалов изменения измеряемых величин были установлены следующие предельные относительные погрешности для теплообменных и гидродинамических характеристик: для потока воды — от  $\pm 2$  до  $\pm 6,0\%$ , для потока воздуха — от  $\pm 3$  до  $\pm 7,5\%$  и для потока трансформаторного масла — средние между вышеприведенными значениями.

# 7 Экспериментальное исследование теплоотдачи пластины

Теплоотдача пластины, как и других тел, зависит от ряда факторов: скорости, физических свойств набегающей жидкости, интенсивности тепловыделения или величины температурного напора, длины начального необогреваемого участка и т. д. В наиболее общем виде эта взаимосвязь может быть представлена безразмерной зависимостью:

$$Nu = f \left( Re, Pr, \frac{\mu_f}{\mu_w}, \frac{\lambda_f}{\lambda_w}, \frac{c_f}{c_w}, \frac{\rho_f}{\rho_w}, \frac{x_1}{x}, \dots \right). \quad (7.1)$$

Влияние указанных факторов на теплоотдачу исследовалось нами в широком диапазоне изменения физических свойств. Критерий  $Re_f$  изменялся от 10 до  $1,0 \cdot 10^5$ , а  $Pr_f$  — от 0,7 до 600. Исследовалась местная и средняя теплоотдача. Основное внимание было сосредоточено на исследовании местной теплоотдачи, что позволило более глубоко изучить и раскрыть сущность физических процессов.

В настоящей работе большое внимание уделяется исследованию влияния граничных условий на теплообмен. Представляются результаты теплоотдачи пластины при  $q_w = \text{const}$  и  $T_w = \text{const}$ . Первое из граничных условий соответствует степенной неизотермичности поверхности, т. е. сопровождается изменением по степенному закону температурного напора вдоль пластины по потоку.

Значительная часть экспериментальных исследований посвящена изучению влияния начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины. В данном случае соотношение обогреваемой и полной длин пластины изменялось от 0,0055 до 0,52.

Наряду с исследованием вышеуказанных вопросов изучалось и влияние изменения физических свойств жидкостей на теплообмен пластины.

Для обобщения экспериментальных данных на основе функциональной зависимости (7.1) было принято степенное критериальное уравнение типа

$$Nu = c Re^m Pr^n. \quad (7.2)$$

Ниже остановимся отдельно на исследовании взаимодействия перечисленных факторов в процессе теплообмена. С этой целью приведем обобщенные зависимости для практических расчетов теплоотдачи пластины, а также их сопоставление с полученными результатами теоретических решений.

Обобщенные экспериментальные данные представлены в многочисленных графиках. Некоторая часть полученных экспериментальных данных, представляющих общую характеристику опытов, приведена в таблицах 12–22 приложений.

## 7.1. Влияние физических свойств жидкости и температурного напора на теплоотдачу пластины

Физические свойства жидкости в процессе теплообмена характеризуют в основном критерий  $Pr$ . Анализ имеющихся научных работ показал, что в большинстве из них за исключением лишь некоторых теоретических решений [13] критерий  $Pr$  изменялся в узком интервале. Причем экспериментальные исследования в большинстве случаев выполнялись в потоках воздуха. Поэтому по имеющимся данным трудно определить влияние физических свойств жидкости на теплообмен. Проведенные нами экспериментальные исследования в различных потоках жидкостей позволяют более обстоятельно изучить влияние физических свойств жидкости на теплоотдачу. Вопрос учета влияния физических свойств жидкости на теплоотдачу тесно связан с учетом влияния изменения этих свойств с изменением температуры в пограничном слое.

При обработке экспериментальных данных на основе степенной зависимости (7.2) применяются два метода учета изменяемости физических свойств жидкости с изменением температуры. По первому методу подбор физических свойств жидкости осуществляется по температуре потока, а для учета влияния свойств с изменением температуры в уравнение (7.2) вводится дополнительный параметр. По второму методу для определения физических свойств в критериях подобия подбирается такая определяющая температура, средняя между температурами потока и стенки, при которой осуществляется учет влияния изменяемости этих свойств на коэффициент теплоотдачи. Причем форма зависимости такая же, как и в случае постоянных физических свойств.

На основе предварительного анализа наших данных был сделан вывод, что за определяющую температуру следует принять температуру набегающего потока  $t_f$ , а для учета изменения свойств жидкости с изменением температуры в пограничном слое ввести дополнительный параметр  $(Pr_f/Pr_w)$  в степени 0,25.

В уравнении (7.2) необходимо определить показатели степени  $m$  и  $n$  при числах  $Re$  и  $Pr$ .

Для нахождения показателя степени  $m$  нужно построить по экспериментальным данным в логарифмических координатах зависимость  $Nu_f = f(Re_f)$  или  $\alpha = f(U)$ . С этой целью в потоках воды и трансформаторного масла были проведены специальные эксперименты при постоянных температуре потока и температурном напоре. При этом влияние изменения физических свойств и температурного напора на теплоотдачу исключалось. Некоторые из таких экспериментов для местной теплоотдачи при  $x=40, 107, 198$  мм (пластина № 3) и средней теплоотдачи для различных пластин представлены на рис. 55.

Графическая интерпретация показывает, что коэффициент теплоотдачи пропорционален скорости в степени 0,5. Ввиду того, что отдельные серии функциональных зависимостей  $\alpha = f(U)$  получены при одинаковых координатах  $x$ , удалось исключить влияние этой координаты на коэффициент

теплоотдачи. Таким образом, с уверенностью можно утверждать, что показатель степени при критерии  $Re$  численно равен показателю скорости  $U$ , т. е.  $m=0,5$ .

Когда известны параметр, аннулирующий влияние температурного напора, и показатель степени при числе  $Re$ , из уравнения (7.2) можно определить влияние физических свойств исследованных жидкостей на теплоотдачу.

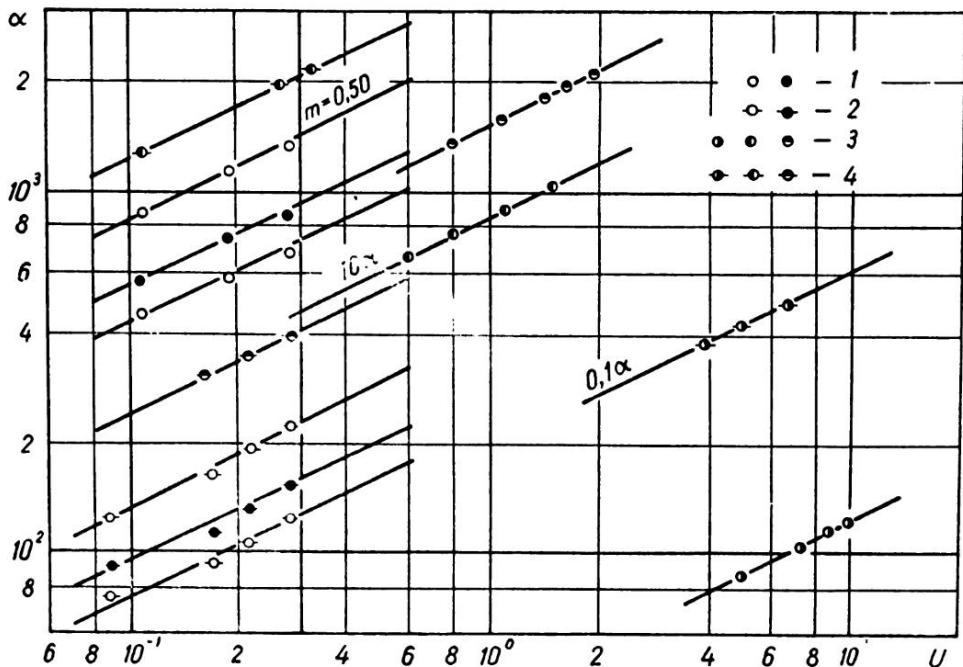


Рис. 55. Зависимость местного и среднего коэффициентов теплоотдачи пластины от изменения скорости. 1 — соответственно местная и средняя теплоотдача в потоке воды для пластины № 3, 2 — то же самое в потоке трансформаторного масла, 3 — соответственно средняя теплоотдача в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла для пластины № 1, 4 — то же самое для пластины № 2

Решение этой задачи сводится к определению показателя степени  $n$  при критерии  $Pr$ .

Приведенные на рис. 56 экспериментальные данные пластины № 3 показывают, что показатель степени  $n$  при критерии  $Pr$  равен 0,33 [58]. Аналогичные результаты получены и для других исследованных пластин. В исследованном диапазоне изменения критерия  $Pr$  показатель степени  $n$  является постоянным. Со значительным уменьшением  $Pr$  показатель степени увеличивается и, например, для жидких металлов он равен 0,5 [12].



Экспериментальные данные, представленные в логарифмических координатах в виде функции  $Nu_{fx} = f(Re_{fx})$  (рис. 57), располагаются отдельными группами опытных точек в зависимости от рода жидкости и ее температуры. Это явно подтверждает сильное влияние физических свойств жидкости и их зависимости от температуры на теплообмен. Указанное влияние вызвано

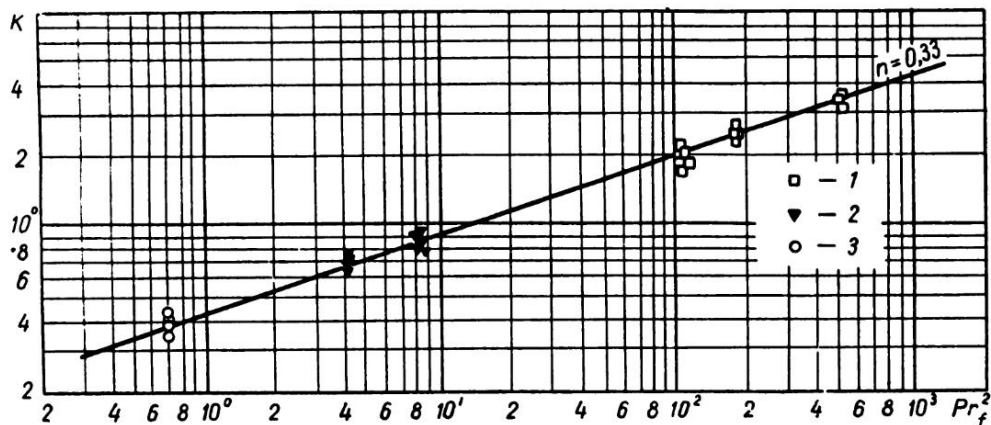


Рис. 56. Определение показателя степени  $n$  при числе  $Pr_f$  в опытах: 1 — с трансформаторным маслом, 2 — с водой, 3 — с воздухом.  $K = Nu_{fx} Re_{fx}^{0,5} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

различной структурой температурных и скоростных полей в пограничных слоях. Мерой подобия этих полей является критерий  $Pr$  в определенной выше степени  $n=0,33$ . Экспериментально определенное значение показателя степени при критерии  $Pr$  подтверждается результатами теоретических решений.

Если экспериментальные данные при  $q_w \approx \text{const}$  (пластина № 3) при различных температурных напорах графически представить (рис. 57) в виде функции  $Nu_{fx} = f(Re_{fx})$  при  $Pr_f = \text{const}$ , то заметим расслоение опытных данных, вызванное величиной температурного напора. С увеличением температурного напора интенсивность теплоотдачи увеличивается. Это также указывает на расположение экспериментальных данных местной теплоотдачи на прямой с большим наклоном по сравнению с ранее определенным  $m=0,50$ . В данном случае местный температурный напор ввиду существующего продольного градиента температуры поверхности тоже увеличивается. Материал, полученный в экспериментах с изотермической пластиной при нагревании и охлаждении жидкости, показывает, что в первом случае (см. рис. 58) теплообмен более интенсивный.

Влияние температурного напора и направления теплового потока на коэффициент теплоотдачи в различных работах учитывается по-разному. Кроме приведенного выше параметра, часто используется соотношение  $\mu_f/\mu_w$ . Не-



обходимо отметить, что для таких вязких жидкостей, как вода и различные масла, с изменением температуры поперек пограничного слоя изменяется главным образом вязкость, поэтому соотношение  $(Pr_f/Pr_w) \approx (\mu_f/\mu_w)$ .

Наши исследования показали, что при наличии градиента вязкости в пограничном слое температурное поле претерпевает основную деформацию от изменения числа  $Pr$  и в меньшей мере — от изменения поля скоростей. Если иметь в виду, что критерий  $Pr$  характеризует соотношение между полями скорости и температуры, то для жидкостей с  $Pr > 1$  подбор параметра  $Pr_f/Pr_w$  является более оправданным.

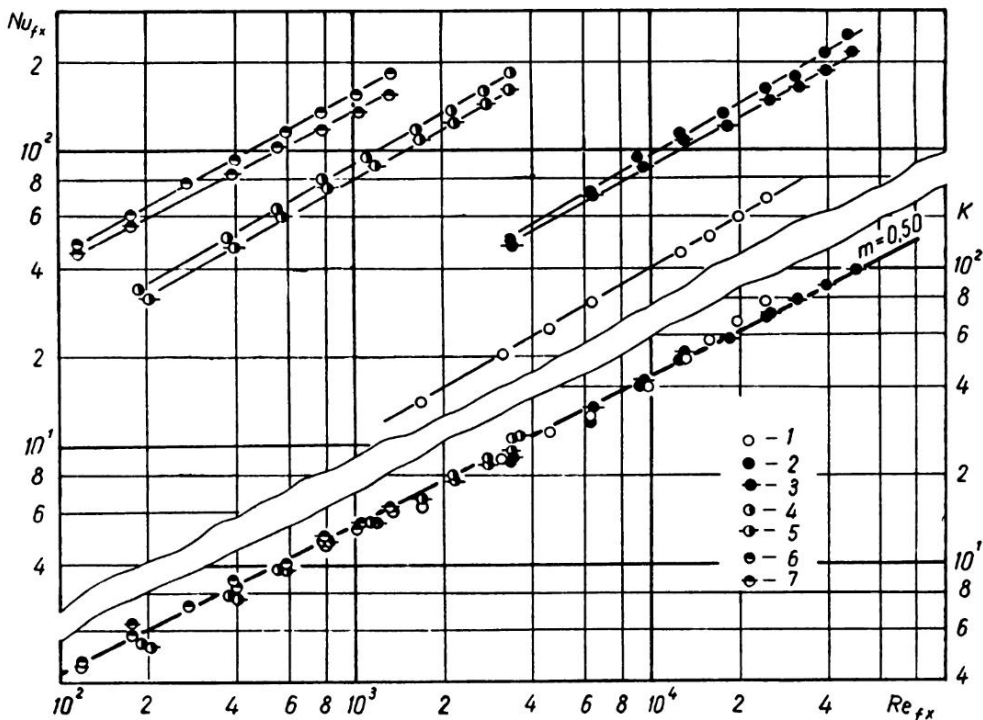
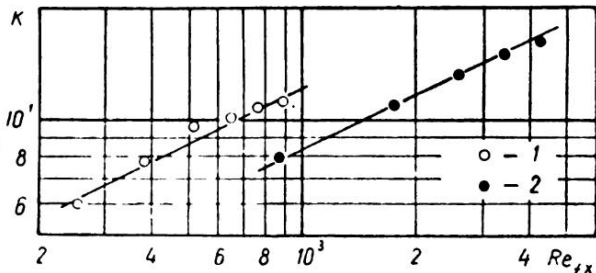


Рис. 57. Влияние физических свойств и температурного напора на теплоотдачу пластины. 1 — в потоке воздуха, 2 — в потоке воды при:  $Pr_f=8,0$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,200-2,25$ , 3 — в потоке воды при:  $Pr_f=8,1$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,052-1,273$ , 4 — в потоке трансформаторного масла при:  $Pr_f=172$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,25-2,33$ , 5 — в потоке трансформаторного масла при:  $Pr_f=181$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,114-1,81$ , 6 — в потоке трансформаторного масла при  $Pr_f=502$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,385-4,95$ , 7 — в потоке трансформаторного масла при:  $Pr_f=498$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,140-2,33$ .  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,25}$

На рисунках 59 и 60 согласно полученным нами экспериментальным данным представлены результаты местной и средней теплоотдачи в зависимости от соотношения  $Pr_f/Pr_w$ . Графическая интерпретация показывает, что с принятием температуры набегающего потока в качестве определяющей влияние

Рис. 58. Зависимость теплоотдачи изотермической пластины от направления теплового потока. 1 — нагревание трансформаторного масла при:  $Pr_f=476$ ,  $Pr_f/Pr_w=1,750$ , 2 — охлаждение трансформаторного масла при:  $Pr_f=135$ ,  $Pr_f/Pr_w=0,333$ .  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33}$



температурного напора и направления теплового потока достаточно хорошо учитывается параметром  $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$ . Это также подтверждается экспериментальными данными, приведенными в нижней части рис. 57, где принят во внимание учет параметра  $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$  и критерия  $Pr_f^{0,33}$ .

Как видно из экспериментальных данных, представленных на рис. 59, в случае охлаждения жидкости ( $T_w < T_f$ ) показатель степени при параметре  $Pr_f/Pr_w$  несколько меньше 0,25, что подтверждается и результатами теоретического решения [91].

Рис. 59. Зависимость местной теплоотдачи пластины от температурного напора и направления теплового потока. 1, 2 — вода, трансформаторное масло соответственно при  $q_w = \text{const}$ , 3, 4 — соответственно нагревание и охлаждение трансформаторного масла при  $T_w = \text{const}$ .  $K = Nu_{fx} Re_{fx}^{-0,5} Pr_f^{-0,33}$

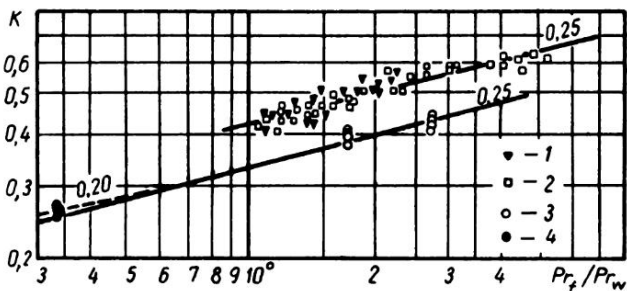
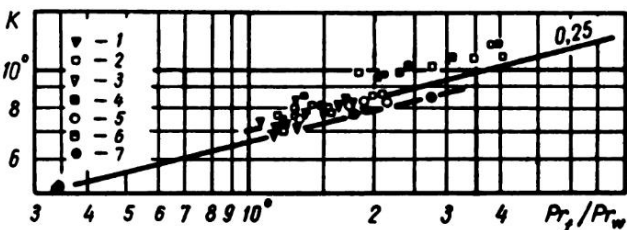


Рис. 60. Зависимость средней теплоотдачи пластины от температурного напора и направления теплового потока. 1, 2 — см. обозначения на рис. 59, 3, 6 — пластина № 2 в потоках воды и трансформаторного масла, 5, 4 — то же самое пластины № 1, 7 —  $T_w = \text{const}$ .  $K = Nu_{fx} Re_{fx}^{-0,5} Pr_f^{-0,33}$



Приведенные на рис. 59 экспериментальные данные, полученные для пластины водяного калориметрирования, располагаются значительно ниже, что является вполне закономерным явлением, вызванным граничным условием  $T_w = \text{const}$ .

## 7.2. Местная теплоотдача изотермической пластины

Для исследования теплоотдачи пластины при граничном условии  $T_w = \text{const}$  использовалась пластина водяного калориметрирования. Данные, полученные в этом эксперименте, показывают, какую важную роль играют граничные условия на стенке пластины в процессе теплообмена. Кроме того, результаты исследования позволяют определить и закономерность теплоотдачи, особенно

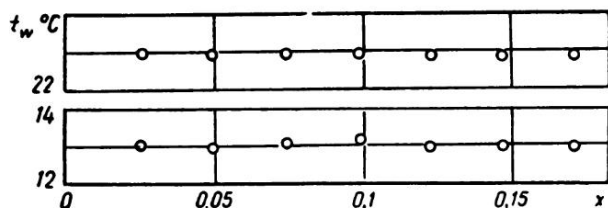


Рис. 61. Температура поверхности пластины водяного калориметрирования. Кружки — значения температуры

влияние направления теплового потока. Анализ этого вопроса уже приведен в предыдущем разделе.

Температурное поле поверхности пластины при двух режимах показано на рис. 61, из которого видно, что температура вдоль всей пластины действительно была постоянной.

Экспериментальные данные, обработанные в критериях подобия с учетом факторов, касающихся влияния физических свойств, температурного напора и направления теплового потока на теплоотдачу, приведены на рис. 62.

Графическая интерпретация дает возможность представить теплоотдачу пластины уравнением:

$$Nu_{fx} = 0,33 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (7.3)$$

Полученное уравнение совершенно точно подтверждает результаты теоретических решений как при постоянных (3.24), так и при переменных физических свойствах жидкости (3.135).

## 7.3. Местная теплоотдача неизотермической пластины

Местный коэффициент теплоотдачи на протяжении всей длины пластины претерпевает значительные изменения. В непосредственной близости от передней кромки пластины он максимален, а с удалением от нее — уменьша-

ется. Такое закономерное изменение коэффициента теплоотдачи (рис. 63) в основном обусловлено образованием и развитием пограничного слоя на пластине.

Из приведенного графика отчетливо видно, что коэффициент теплоотдачи очень сильно зависит от продольной координаты или от местоположения

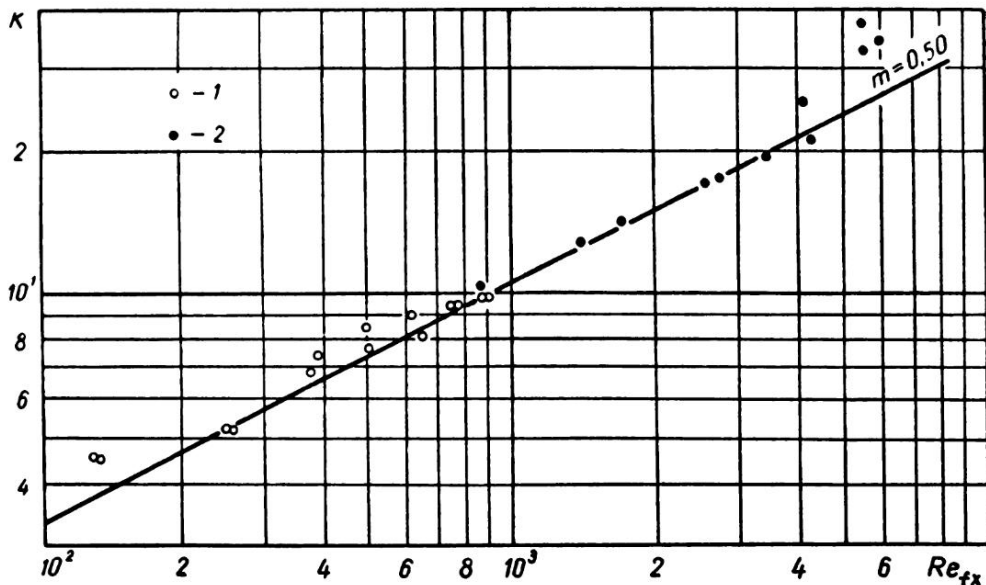


Рис. 62. Местная теплоотдача изотермической пластины в потоке трансформаторного масла. 1 — нагревание жидкости, 2 — охлаждение жидкости.  $K = Nu_{fx} Pr_{fx}^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

рассматриваемой точки. С помощью логарифмических координат можно определить зависимость между коэффициентом теплоотдачи и продольной координатой  $[\alpha_x = f(x)]$ . Ввиду неизотермичности поверхности и зависимости физических свойств жидкости от температуры коэффициент теплоотдачи зависит не только от продольной координаты, но и от температурного напора. Для исключения влияния последнего необходимо использовать ранее определенный параметр  $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$ . Тогда опытные данные некоторых экспериментов можно представить на графике (рис. 64) в виде функциональной зависимости  $\alpha_x (Pr_f/Pr_w)^{-0,25} = f(x)$ .

Графическое отображение позволяет определить показатель степени при продольной координате  $x$ . По абсолютному значению он близок показателю степени, ранее определенному для зависимости  $\alpha_x = f(U)$ , и равен 0,5.

Местная теплоотдача неизотермической пластины изучалась нами на двух пластинах — электрокалориметрах, основные характеристики которых даны в табл. 21.

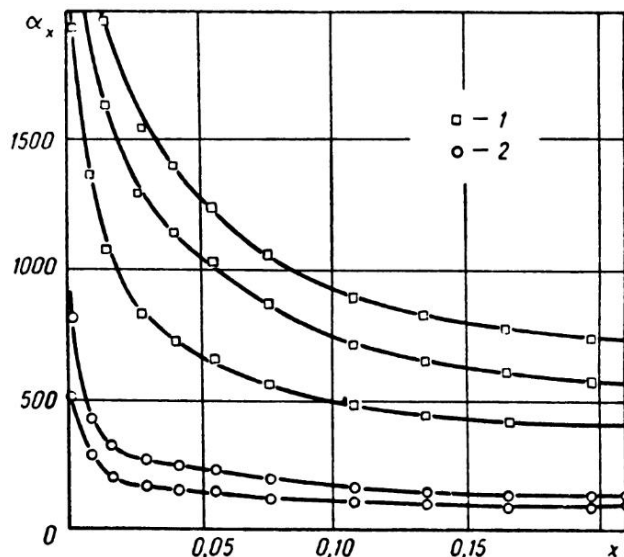


Рис. 63. Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины при  $q_w = \text{const}$  (пластина № 3). 1 — в потоке воды, 2 — в потоке трансформаторного масла

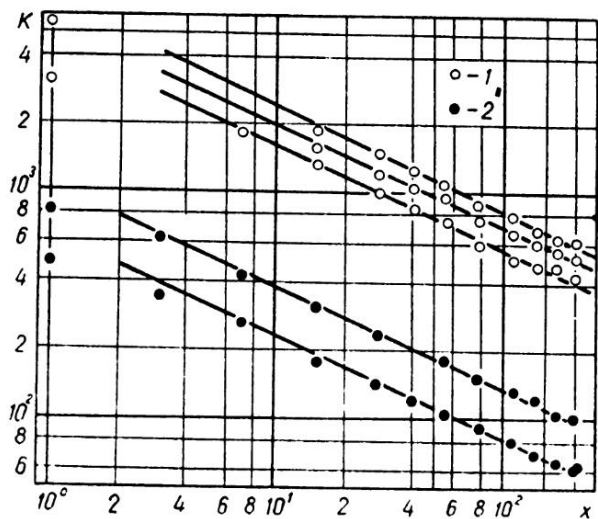


Рис. 64. Зависимость местного коэффициента теплоотдачи пластины от продольной координаты. 1 — в потоке воды, 2 — в потоке трансформаторного масла.  $K = \alpha_x (Pr_f / Pr_w)^{-0.25}$ ,  $x$  мм

На пластине № 3 выполнялись условия  $q_w \approx \text{const}$  и  $n_1 = 0,4$ , где  $n_1$  является показателем степени в уравнении, выражающем изменение температурного напора:

$$T_w - T_f = \Delta t_x = Ax^{n_1}. \quad (3.49)$$

Для пластины № 4 были характерны условия  $q_w = \text{const}$ ,  $n_1 \approx 0,5$ .

Изменение температурного напора согласно уравнению (3.49) для некоторых экспериментов представлено на рис. 65.

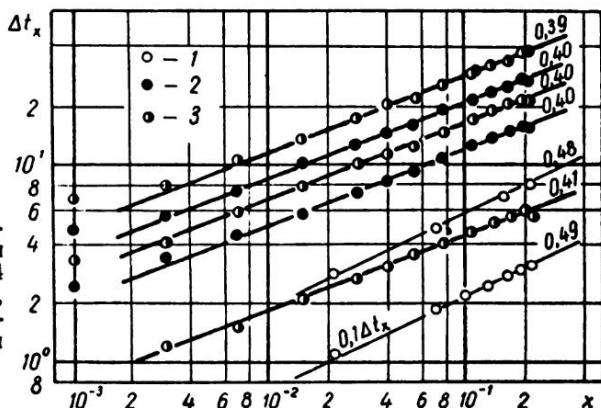


Рис. 65. Изменение температурного напора вдоль поверхности пластины. 1 — для пластины № 4 в потоках воздуха и воды, 2, 3 — для пластины № 3 в потоках трансформаторного масла и воды соответственно

Экспериментальные данные, полученные для пластин №№ 3, 4, представлены на рисунках 66, 67 в виде зависимости

$$Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (Pr_f / Pr_w)^{-0,25} = f(Re_{fx}).$$

Графическая интерпретация позволяет определить закономерности теплоотдачи неизотермических пластин, соответственно выражаемых уравнениями

$$Nu_{fx} = 0,43 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}, \quad (7.4)$$

$$Nu_{fx} = 0,45 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (7.5)$$

Сравнение этих уравнений показывает, что степень неизотермичности поверхности значительно влияет на теплоотдачу. Это влияние более ярко выражается при сопоставлении теплоотдачи неизотермической поверхности с теплоотдачей изотермической пластины (7.3). С целью сопоставления на рисунках 66 нанесены полученные нами экспериментальные данные (7.3). Это позволяет судить о том, какую важную роль в интенсивности теплоот-

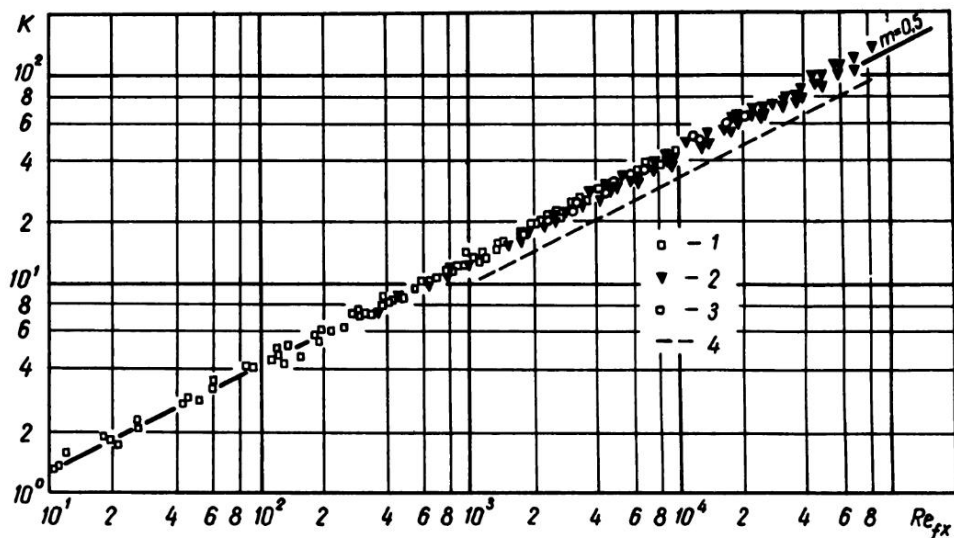


Рис. 66. Местная теплоотдача неизотермической по длине пластины (пластина № 3) при:  $q_w \approx \text{const}$ ,  $n_1=0,4$ . 1–3 – в потоках трансформаторного масла, воды, воздуха, 4 – теплоотдача изотермической пластины (7.3).  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

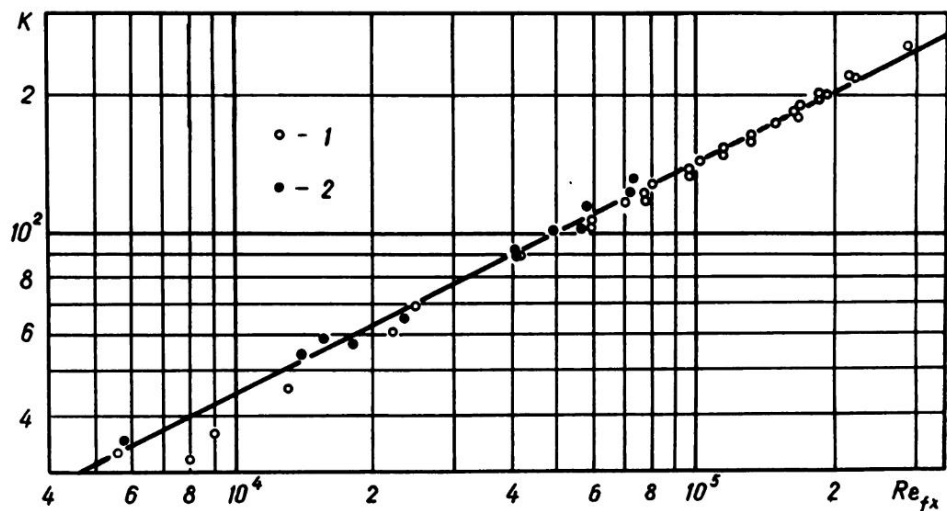


Рис. 67. Местная теплоотдача неизотермической по длине пластины (пластина № 4) при  $q_w = \text{const}$ ,  $n_1=0,5$ . 1, 2 – в потоках воды и воздуха соответственно.  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

дачи играют граничные условия на теплообменной поверхности. Численные значения коэффициента теплоотдачи пластины при постоянном тепловом потоке приблизительно на 35% выше коэффициентов теплоотдачи изотермической пластины.

Причиной более интенсивного теплообмена на неизотермической поверхности нужно считать деформацию температурного профиля, обнаруженную также и при теоретическом решении (см. главу 3).

С увеличением экспоненты  $n_1$  (см. рис. 13) профили температуры ложатся более круто. Это означает, что тепловые пограничные слои становятся тоньше. Ввиду обратной пропорциональности между коэффициентом теплоотдачи и толщиной теплового пограничного слоя процесс теплообмена на неизотермической поверхности более интенсивен. Это не относится к неизотермической поверхности лишь тогда, когда продольный градиент температуры стенки отрицательный, так как в данном случае неизотермичности теплообмен становится менее интенсивным. Таким образом, динамика толщины пограничного слоя, вызванная неизотермичностью поверхности при деформации температурного профиля, в основном и определяет уровень интенсивности теплообмена.

Полученные нами уравнения (7.4) и (7.5) могут быть использованы только в тех конкретных случаях, когда  $n_1=0,4$  и  $0,5$ .

Влияние продольного градиента температуры поверхности на теплоотдачу пластины при различных степенях неизотермичности поверхности количественно можно определить соотношением теплоотдачи неизотермической ( $n_1 \neq 0$ ) и изотермической ( $n_1 = 0$ ) пластин согласно приведенной в главе 3 зависимости:

$$\chi = \frac{Nu_x (n_1 \neq 0)}{Nu_x (n_1 = 0)} = \frac{4}{3} n_1 \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3} n_1 + \frac{2}{3}\right)}. \quad (3.78)$$

Некоторые значения зависимости  $\chi = f(n_1)$  рассчитаны и представлены в табл. 22 и на рис. 68. На графике точками отмечены экспериментально полученные из уравнений (7.4), (7.5) значения  $\chi$ . Этими экспериментальными данными совершенно точно подтверждаются результаты теоретического решения.

Таблица 22

Изменение коэффициента неизотермичности

$n_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,8	1,0	2,0
$\chi$	1	1,09	1,17	1,25	1,30	1,36	1,52	1,6	1,98



Если полученные нами уравнения (7.4) и (7.5) разделить на коэффициенты, взятые из табл. 22 согласно  $n_1$ , имевшим место в наших экспериментах, то получим уравнение:

$$Nu_{fx} = 0,33 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_w / Pr_f)^{0,25}, \quad (7.6)$$

которое полностью совпадает с выражением теплообмена изотермической пластины (7.3).

Таким образом, в результате обобщения экспериментальных данных и аналитических решений для практических расчетов местной теплоотдачи

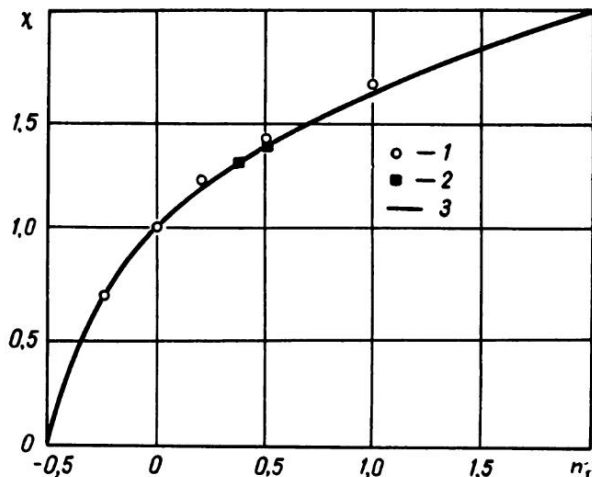


Рис. 68. Изменение коэффициента неизомермичности. 1 — по исследованию [25], 2 — результаты настоящего исследования, 3 — по исследованию [27]

неизомермической пластины при ламинарном пограничном слое получаем следующую зависимость:

$$Nu_{fx} = 0,33 \chi Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_w / Pr_w)^{0,25}, \quad (7.7)$$

где значение коэффициента  $\chi$  следует брать из табл. 22 в зависимости от  $n_1$ .

#### 7.4. Влияние начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины

Влияние начального необогреваемого участка исследовано в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла при изменении числа  $Pr$  от 0,7 до 510, а числа  $Re$  — от 4 до  $3 \cdot 10^4$ .

Опыты проводились при двух длинах необогреваемого участка  $l_0 = 92$  мм и  $l_0 = 182$  мм. Соотношения обогреваемой части  $x_1$  и полной длины пластины  $x$  изменялись от 0,0055 до 0,52.

Экспериментальные данные обрабатывались с помощью степенного критериального уравнения (7.2). Показатели степени при критериях подобия получены те же самые, что и для полностью обогреваемой пластины:  $m=0,5$  и  $n=0,33$ . Температурный напор учитывался параметром  $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$ .

При исследовании местной теплоотдачи за определяющий размер принималось расстояние от передней кромки обогреваемой части до исследуемой

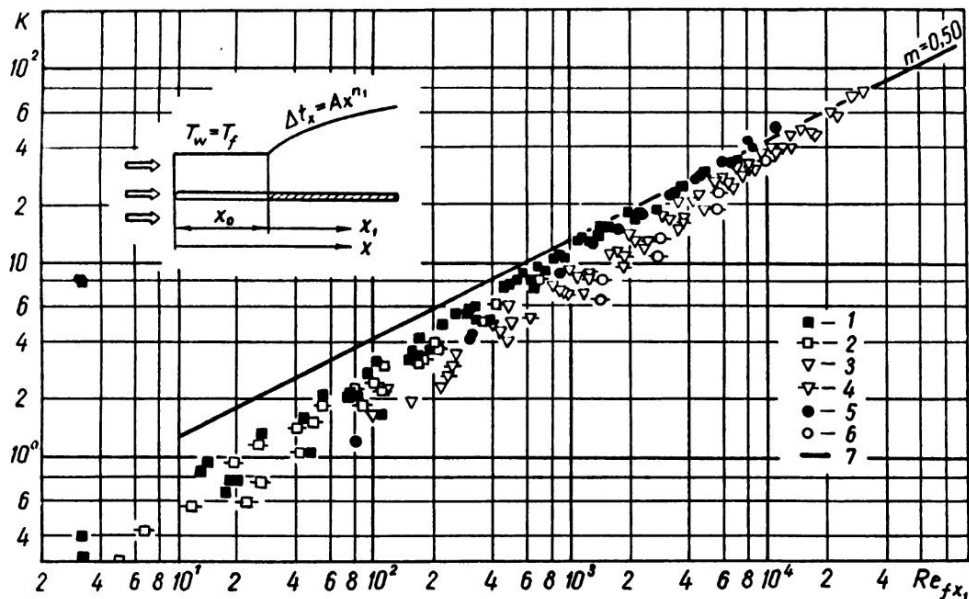


Рис. 69 Местная теплоотдача пластины с начальным необогреваемым участком при  $x_0=92$  и  $x_0=182$  мм соответственно: 1, 2 — в потоке трансформаторного масла, 3, 4 — в потоке воды, 5, 6 — в потоке воздуха, 7 — теплоотдача пластины без необогреваемого участка согласно (7.4).  $K = Nu_{fx_1} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

точки  $x_1$ . Опытные данные с учетом вышеизложенного были представлены нами в логарифмических координатах на рис. 69. На этом же рисунке приведена кривая, соответствующая теплоотдаче пластины без необогреваемого участка.

Из рис. 69 видно, что все опытные данные пластины с необогреваемым участком располагаются значительно ниже прямой, соответствующей уравнению (7.4) и определяющей теплоотдачу полностью обогреваемой пластины. Такое размещение экспериментальных данных показывает, что теплообмен пластины с начальным необогреваемым участком менее интенсивен. Менее интенсивный процесс теплоотдачи обусловлен неодновременным образованием

и развитием динамического и теплового пограничных слоев. Достигая обогреваемой части пластины, развивающийся ламинарный гидродинамический слой имеет большее термическое сопротивление переносу тепла, чем в случае, когда нет необогреваемого участка. Неодновременное развитие пограничных слоев приводит к менее интенсивному конвективному теплопереносу, чем одновременное, поскольку определенные участки теплового пограничного слоя находятся в зоне с меньшей скоростью динамического пограничного слоя.

Если внимательно изучить опытные данные, приведенные на рис. 69, то заметим их явную зависимость от длины начального участка, с увеличением которой теплоотдача уменьшается. Таким образом, в уравнение (7.2) для дальнейшего обобщения результатов необходимо ввести дополнительный параметр для учета влияния начального необогреваемого участка. В качестве такого параметра нами [59] вводится соотношение обогреваемой  $x_1$  и полной  $x$  длин до рассматриваемой точки. Тогда уравнение (7.2) с учетом вышеизложенного принимает вид:

$$Nu_{fx_1} = c Re_{fx_1}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{n_0}, \quad (7.8)$$

где в критериях подобия за определяющий размер принята обогреваемая часть пластины.

Показатель степени  $n_0$  графически получен на рис. 70. Из этого рисунка видно, что влияние начального необогреваемого участка на местный теплообмен пластины учитывается параметром  $(x_1/x)^{0,2}$ . Наши экспериментальные результаты хорошо подтверждают итоги теоретического решения [36] (см. рис. 70).

На рис. 71 приведены экспериментальные данные для зависимости

$$Nu_{fx_1} Pr_f^{-0,33} (x_1/x)^{-0,2} (Pr_f/Pr_w)^{0,25} = f(Re_{fx_1}).$$

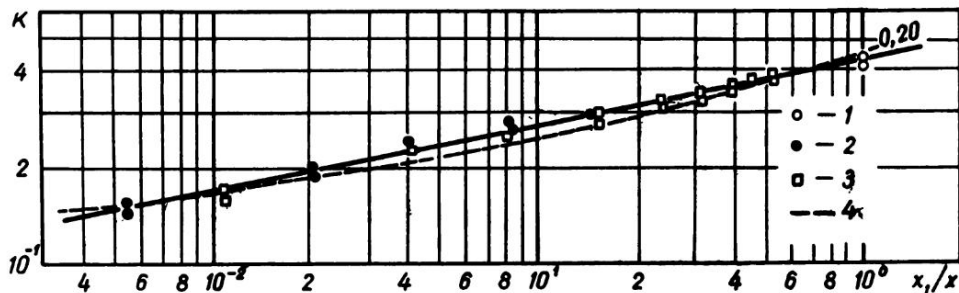


Рис. 70. Определение влияния начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины в опытах при  $x_0$ , равном: 1 — 0,0 мм, 2 — 182 мм, 3 — 92 мм, 4 — результаты исследования [36].  $K = Nu_{fx_1} Re_{fx_1}^{-0,5} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

Как видно из этого рисунка, при  $q_w \approx \text{const}$  экспериментальные данные в предложенной обработке хорошо укладываются на одной прямой, соответствующей уравнению теплообмена пластины без необогреваемого участка.

Таким образом, теплоотдача пластины с необогреваемым участком при изменении температуры теплообмена поверхности по степенному закону

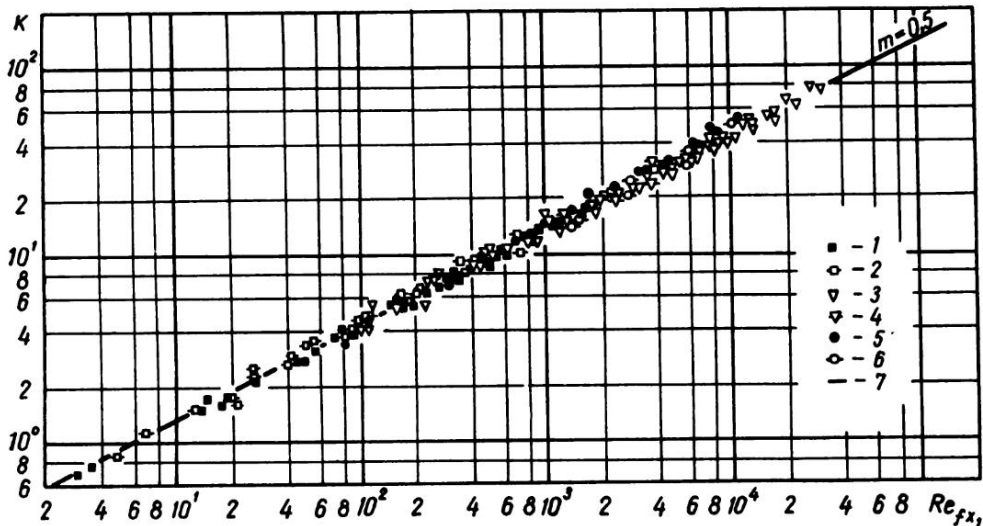


Рис. 71. Обобщение местной теплоотдачи пластины с начальным необогреваемым участком (обозначения см. на рис. 69).  $K = Nu_{fx_1} Pr_f^{0,33} (x_1/x)^{-0,2} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

при  $n_1 = 0,4$  в исследованном интервале чисел  $Re_{fx_1}$  может быть определена зависимость

$$Nu_{fx_1} = 0,43 Re_{fx_1}^{0,5} Pr_f^{0,33} \left( \frac{x_1}{x} \right)^{0,2} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (7.9)$$

В результате для расчета местной теплоотдачи неизотермической пластины при ламинарном пограничном слое с учетом влияния необогреваемого начального участка получена зависимость:

$$Nu_{fx_1} = 0,33 \chi Re_{fx_1}^{0,5} Pr_f^{0,33} \left( \frac{x_1}{x} \right)^{0,2} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}, \quad (7.10)$$

где  $\chi$  определяется по табл. 22.

С некоторой приближенностью эту формулу можно использовать для случаев граничного условия  $q_w \approx \text{const}$  при расчете теплоотдачи пластины, если на поверхности одновременно существуют ступенчатая и степенная неизотермичности.

### 7.5. Средняя теплоотдача изотермической пластины

Данные по теплообмену изотермической поверхности были получены нами в экспериментах с пластиной водяного калориметрирования и с электрообогреваемой пластиной № 1, температура поверхности которой была близка к постоянной. Обработанные по общепринятой методике экспериментальные данные для этих двух пластин представлены на рис. 72. Здесь показатели степени при критериях принимались равными ранее определенным. Данные наших исследований, приведенные на рис. 72, обобщены уравнением:

$$Nu_f = 0,66 Re_f^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}, \quad (7.11)$$

которое хорошо подтверждает результаты теоретических решений (см. гл. 3).

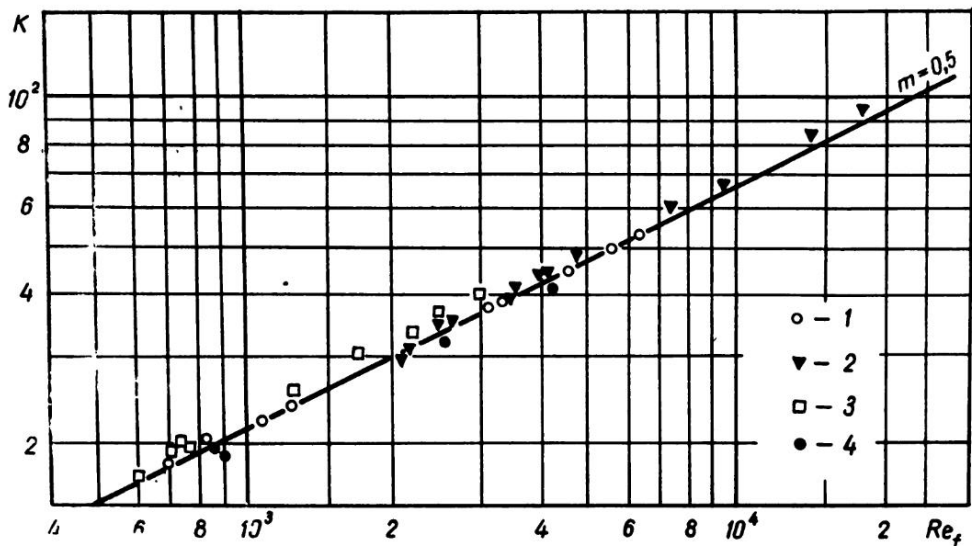


Рис. 72. Средняя теплоотдача изотермических по длине пластин (пластины №№ 1, 5). 1—3 — в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла (пластина № 1), 4 — в потоке трансформаторного масла (пластина № 5).  $K = Nu_f Pr_f^{-0,33} (Pr_f / Pr_w)^{-0,25}$

### 7.6. Средняя теплоотдача неизотермической пластины

Определение средней теплоотдачи неизотермической пластины более сложное. Существуют два метода осреднения коэффициента теплоотдачи. По первому из них средний коэффициент теплоотдачи определяется интегри-

раванием значений местного коэффициента теплоотдачи и представляется зависимостью:

$$\alpha_m = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx. \quad (7.12)$$

По второму методу он определяется делением среднеинтегрального теплового потока на среднеинтегральный температурный напор по длине и выражается формулой

$$\alpha_m = \frac{\frac{1}{l} \int_0^l q_w dx}{\frac{1}{l} \int_0^l \Delta t_x dx}. \quad (7.13)$$

В настоящее время нет общепринятого метода осреднения коэффициента средней теплоотдачи. Теоретически более обоснованным является первый метод. Однако расчеты теплоотдачи для инженерных приложений часто ведутся по второму методу. Известно, что осреднение тех же самых данных по первому и по второму методу приводит к расхождениям в результатах. В данной работе был использован второй метод осреднения температурных напоров.

Средний коэффициент теплоотдачи пластин №№ 1, 2 определялся на всей их длине, а пластин №№ 3, 4 — на длине 182 и 300 мм соответственно.

Показатели степени при критериях принимались те же самые, что и для местной теплоотдачи. Аналогично учитывалось и влияние температурного напора на теплоотдачу. Представленные на рис. 73 данные по средней теплоотдаче для всех пластин в интервале изменения чисел  $Re_f$  от 10 до  $10^5$  можно обобщить уравнением:

$$Nu_f = 0,71 Re_f^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (7.14)$$

Средний коэффициент теплоотдачи также может быть определен интегрированием зависимости местного теплообмена (7.7). Тепловой поток согласно этому уравнению может быть представлен зависимостью:

$$q_w = \alpha_x \cdot \Delta t_x = 0,331 \cdot \frac{\lambda}{x} \chi Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25} \Delta t_x. \quad (7.15)$$

Введя значения  $\Delta t_x$  согласно (3.49), запишем выражение для определения теплового потока в более общем виде:

$$q_w = c \frac{A \cdot x^{n_1}}{\sqrt{x}}, \quad (7.16)$$

где  $c$  — константа, включающая все величины, не зависящие от  $x$ .

Подставив последнее выражение в зависимость (7.13), вычисляем средний коэффициент теплоотдачи по второму методу. В результате определения средней теплоотдачи получаем:

$$Nu_f^* = 0,66 \chi \frac{n_1 + 1}{2n_1 + 1} Re_f^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (7.17)$$

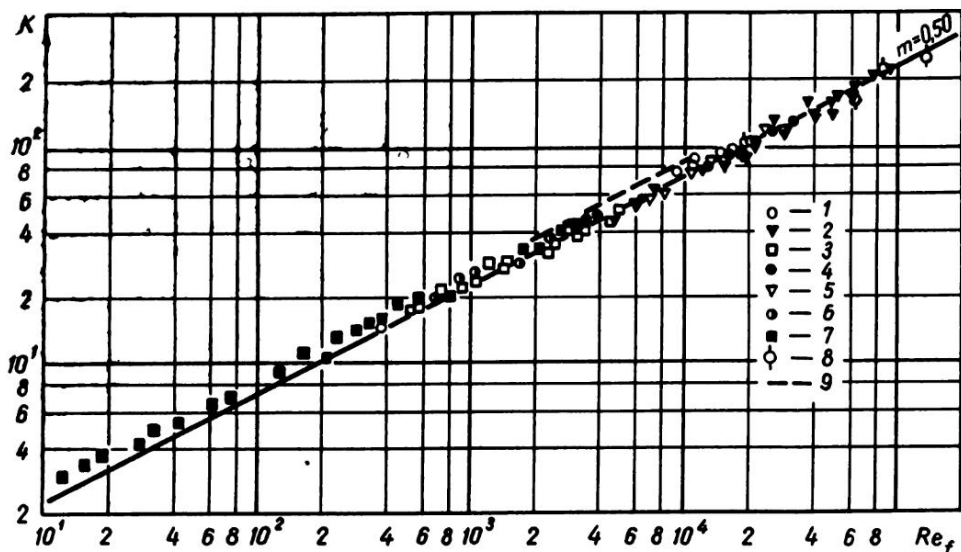


Рис. 73. Средняя теплоотдача неизотермических по длине пластин. 1-3 — в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла (пластина № 3) соответственно, 4-6 — то же самое для пластины № 2, 7 — в потоке трансформаторного масла (пластина № 1), 8 — в потоке воздуха и воды (пластина № 4), 9 — результаты исследования [29].  $K = Nu_f Pr_f^{-0,33} (Pr_f / Pr_w)^{-0,25}$

Если средний коэффициент теплоотдачи определить по первому методу согласно зависимости (7.12), то тогда

$$Nu_f' = 0,66 \chi \cdot Re_f^{0,5} \cdot Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (7.18)$$

Разделив зависимость (7.18) на (7.17), получаем выражение:

$$\frac{Nu_f'}{Nu_f^*} = \frac{2n_1 + 1}{n_1 + 1}, \quad (7.19)$$

позволяющее определить соотношение между коэффициентами теплоотдачи, определенными по обоим методам осреднения. Выражение показывает, что с увеличением неизотермичности поверхности указанные методы осреднения дают значительно расходящиеся результаты (рис. 74.). Если же поверхность изотермическая ( $n_1 = 0$ ), то разницы в коэффициентах теплоотдачи, определенных этими методами, не наблюдается. В практических условиях при

расчете тепловых потоков неизотермических поверхностей следует обязательно обращать внимание на методы осреднения коэффициентов теплоотдачи.

Разделив (7.17) на (7.11), получаем зависимость

$$\frac{Nu_f''}{Nu_f} = \chi \frac{n_1 + 1}{2n_1 + 1}, \quad (7.20)$$

которая выражает соотношение средней теплоотдачи неизотермической пластины, осредненной по второму методу, и средней теплоотдачи изотермической пластины (7.11).

Последняя зависимость показывает, что средняя теплоотдача (рис. 75) неизотермической поверхности, определенная по второму методу, приблизительно равна теплоотдаче изотермической пластины. Как видно, даже при

Рис. 74. Соотношение средних коэффициентов теплоотдачи, осредненных по первому и второму методам осреднения для неизотермических пластин.  $K = Nu_f' / Nu_f''$

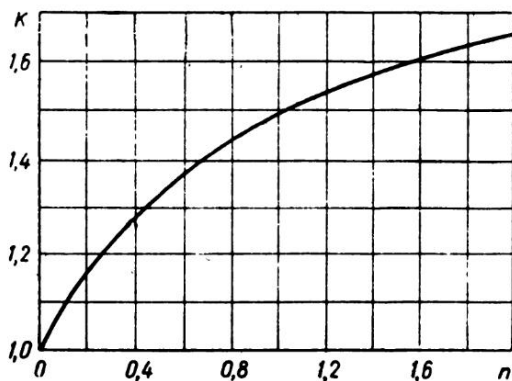
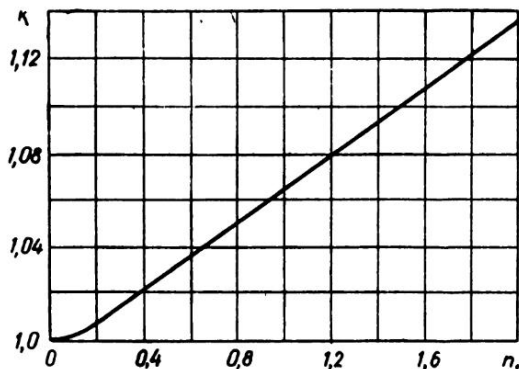


Рис. 75. Соотношение коэффициента теплоотдачи неизотермической пластины, осредненного по второму методу, с коэффициентом теплоотдачи изотермической пластины.  $K = Nu_f'' / Nu_f$





весьма высокой неизотермичности поверхности установить ее влияние на интенсивность теплообмена, используя второй метод осреднения, практически невозможно.

Экспериментальные данные по средней теплоотдаче пластины с необогреваемым участком представлены на рис. 76. Обобщались они совершенно ана-

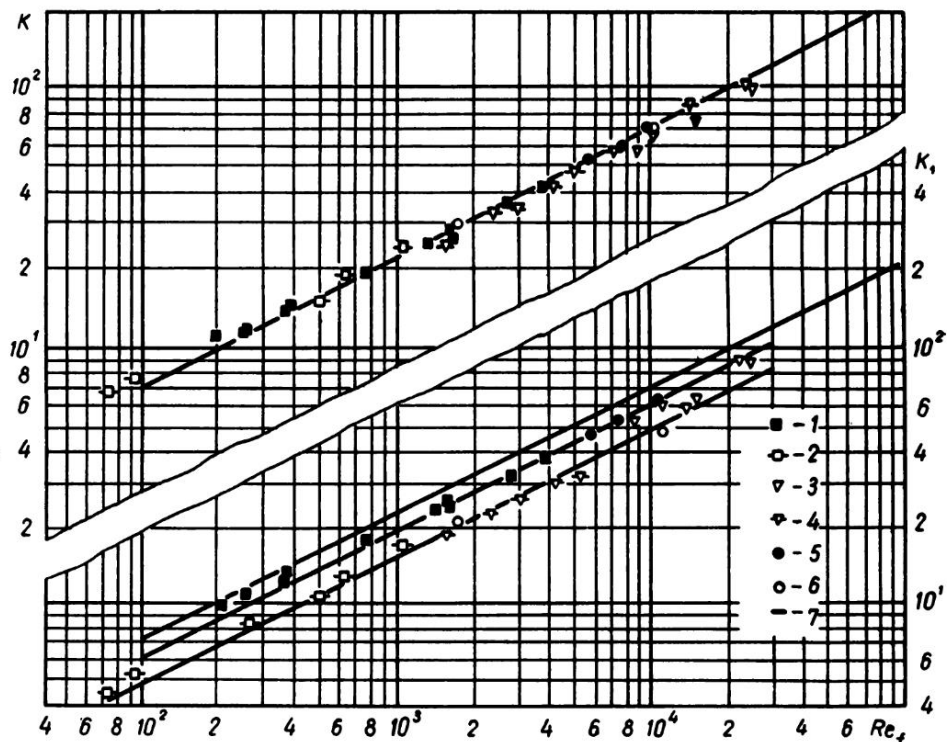


Рис. 76. Средняя теплоотдача пластины с начальным необогреваемым участком. 1-6 — обозначения см. на рис. 69, 7 — средняя теплоотдача пластины без необогреваемого участка согласно (7.14).  $K_1 = Nu_f Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$ .  $K = Nu_f Pr_f^{-0,33} (l_1/l)^{-0,2} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

логично данным для полностью обогреваемой пластины. За определяющий размер принималась длина, участвующая в теплообмене. Влияние необогреваемых начальных участков аналогично местной теплоотдаче учитывалось параметром  $l_1/l$  в степени 0,2. Осреднение осуществлялось на участках длиной  $l_1 = 92$  мм и  $l_1 = 30,1$  мм.

Окончательно для расчета среднего теплообмена пластины с учетом влияния начального необогреваемого участка будем иметь:

$$Nu_f = 0,71 Re_f^{0,5} Pr_f^{0,33} (l_1/l)^{0,2} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (7.21)$$

## 7.7. Сопоставление полученных результатов

Было проведено сопоставление полученных нами результатов с результатами теоретических и экспериментальных исследований других авторов. Сопоставление приведено в табл. 23. Из таблицы видно, что наши данные хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными других исследователей.

Таблица 23

Сопоставление результатов различных исследований

Автор	Литература	$Nu_x/Re_x^{0,5} \cdot Pr^{0,33}$			
		$n_1=0,0$	$n_1=0,4$	$n_1=0,5$	$n_1=1,0$
Теоретические решения					
Польгаузен Э. . . . .	[1]	0,332	—	—	—
Кружилин Г. Н. . . . .	[4]	0,346	—	—	—
Леви С. . . . .	[25]	0,324	0,444	0,470	0,537
Сцеса С., Леви С. . . . .	[27]	0,332	0,434	0,452	0,531
Подольская Э. Л. . . . .	[28]	0,335	0,454	0,475	0,570
Федж А., Фокнер В. . . . .	[29]	0,337	0,441	0,464	—
Амброк Г. С. . . . .	[30]	0,332	0,482	0,512	—
Имаи И. . . . .	[31]	0,338	0,440	0,460	0,540
Эккерт Е. и сотр. . . . .	[33]	0,332	0,436	0,450	—
Лайтхилл М. . . . .	[34]	0,341	0,445	0,463	0,550
Чепмен Д., Рубезин Р. . . . .	[35]	0,332	0,445	0,460	0,550
Лабунцов Д. А. . . . .	[36]	0,332	0,448	0,472	0,551
Лоу Г. . . . .	[113]	0,358	0,436	0,452	0,518
Ока С. . . . .	[114]	—	—	0,470	—
Бактер Д., Рейнольдс В. . . . .	[115]	0,332	0,438	0,445	—
Данное исследование		0,330	—	—	—
Экспериментальные исследования					
Пармале Г., Губшер Р. . . . .	[39]	0,324	—	—	—
Сато С., Сугавара Т. . . . .	[42]	0,330	0,448	0,475	—
Ид А., Саундерс О. . . . .	[44]	0,332	—	—	—
Якоб М., Доу В. . . . .	[45]	0,332	—	—	—
Данное исследование		0,330	0,430	0,450	—

Совершенно точно совпадают результаты уравнений (3.25), (7.3), (7.11), полученные при исследованиях местной и средней теплоотдачи пластины с изотермической по длине поверхностью. Результаты теплоотдачи пластины с неизотермической поверхностью при  $n_1=0,4; 0,5$  совпадают с нашими резуль-

татами с точностью до 1–4%. Расхождение наблюдается лишь при сопоставлении наших данных с результатами Г. С. Амброка [30], что, видимо, вызвано приближенностью аналитического решения.

Таким образом, экспериментальные результаты, полученные нами в широком интервале изменения  $Re$  и  $Pr$ , подтверждают итоги большинства аналитических исследований.

Немногочисленные экспериментальные исследования, известные в литературе, посвящены в основном определению теплоотдачи пластин в потоке воздуха. Данные наших опытов с жидкостями при критерии  $Pr$  в степени 0,33 хорошо согласуются с результатами этих исследований.

В некоторых работах предполагается [24, 108], что при малых скоростях ламинарного потока на теплообмен пластины могут оказывать влияние гравитационные потоки свободной конвекции. При проведении исследований мы обратили внимание на этот факт.

В исследованиях нами использовались пластины разной длины. Эксперименты велись при различных температурных напорах, в потоках жидкости с различными физическими свойствами. Изменение этих факторов в широких пределах может вызвать потоки естественной конвекции различной интенсивности, однако анализ данных наших экспериментов по местной теплоотдаче пластины не подтвердил этого предположения. Все экспериментальные данные обобщались едиными зависимостями (7.7), (7.10), (7.14), не требующими введения критерия  $Gr$ , учитывающего влияние свободной конвекции. Сопоставление результатов измерений температуры верхней и нижней стенок пластин №№ 3, 4 и 5 показало, что их температурные поля совершенно точно совпадают и не зависят от ориентации теплообменной поверхности в потоке. Это также подтверждает факт об отсутствии свободной конвекции.

Известно [109], что интенсивность свободной конвекции на верхней стенке горизонтальной пластины в два раза больше, чем на нижней. Это должно оказать сильное влияние на температурное поле стенок. Однако тщательные измерения температуры поверхностей обеих сторон пластины не подтвердили этого предположения. Следовательно, температурное поле поверхности обусловлено только вынужденной конвекцией. Векторное суммирование результатов свободной и вынужденной конвекции, проведенной согласно методике, предложенной в работе [110], не подтвердило наличия свободной конвекции.

Аналитические методы определения теплообмена пластины в потоке воздуха [111, 112] позволяют установить соотношение между сложным теплообменом (свободная и вынужденная конвекция) и теплообменом при отсутствии свободной конвекции в виде уравнения:

$$\frac{Nu_1}{Nu_2} = 1 + M \frac{Gr_x}{Re_x^{5/2}}, \quad (7.22)$$

где  $M=1,02$  – константа, определенная в работе [112].

При анализе данных наших экспериментов, полученных в потоке воздуха с пластинами №№ 1, 2, 3 при минимальных и максимальных числах  $Re_x$ , было установлено, что соотношение (7.22) изменяется от 1,0 до 1,0045. Отсюда видно, что естественная конвекция составляет лишь доли процента. А тот факт, что результаты, полученные для потоков воздуха, хорошо совпадают с результатами, полученными для других потоков жидкости, позволяет сделать вывод, что и в последних влияние естественной конвекции на теплоотдачу пластины мало ощутимо.

Полученная нами зависимость (7.9) при исследовании влияния начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины соответствует граничному условию  $q_w \approx \text{const}$ . Если провести сравнение наших результатов с результатами, полученными М. Рубезиным и Э. Эккертом [23] при граничном условии  $T_w = \text{const}$ , то увидим, что влияние начального необогреваемого участка учитывается различными параметрами [см. (3.47), (7.9)]. Параметр из уравнения (3.47) можно преобразовать согласно нашему определяющему размеру  $x_1$ . Тогда этот параметр примет вид:

$$\frac{(x_1/x)^{0,6}}{\sqrt[3]{1-(1-x_1/x)^{0,75}}} \quad (7.23)$$

Параметры, учитывающие влияние необогреваемого участка на теплоотдачу пластины и определенные согласно зависимостям (7.9) и (7.23), сопоставляются на рис. 77 и в табл. 24. Результаты, как видно, между собой не сов-

Таблица 24

Сопоставление методов учета влияния начального необогреваемого участка

Параметр \ $x_1/x$	1,0	0,5	0,3	0,15	0,05	0,01
$[x_1/x]^{0,2}$	1,0	0,890	0,786	0,684	0,550	0,400
$\frac{(x_1/x)^{0,6}}{\sqrt[3]{1-(1-\frac{x_1}{x})^{0,75}}}$	1,0	0,955	0,900	0,800	0,670	0,465

падают, чего и следовало ожидать, так как они получены при различных граничных условиях на стенке. Таким образом, для определения теплоотдачи пластины с учетом влияния необогреваемого участка при  $q_w = \text{const}$  следует использовать уравнения (7.9), (7.21), а в случае  $T_w = \text{const}$  — уравнение (3.47), которое с учетом (7.23) для инженерных расчетов с точностью до 4–5% можно аппроксимировать (см. рис. 77) зависимостью  $(x_1/x)$  в степени 0,14. В других случаях степенной неизотермичности при наличии начального

необогреваемого участка теплоотдача пластины может быть определена по методике, предложенной Д. А. Лабунцовым [36], где необходимо использовать уравнение (3.98) или при определенных граничных условиях—уравнение (3.96).

Анализ, проведенный в главе 2, показывает, что гидравлическое сопротивление при  $Re < 3000$ , т. е. непосредственно у передней кромки пластины, не

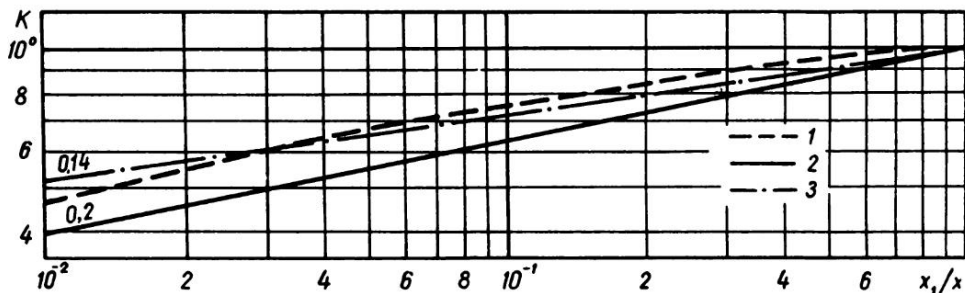


Рис. 77. Сопоставление параметров, учитывающих влияние начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины. 1 — по результатам работы [32] при  $T_w = \text{const}$ , 2 — по результатам настоящего исследования (7.9) при  $q_w = \text{const}$ , 3 — обобщение результатов [32] экспонентой 0,14.

$$K = \frac{Nu_{x_1}(x_0=0)}{Nu_{x_1}(x_0 \neq 0)}$$

соответствует общей закономерности, вытекающей из теоретических решений [48]. Оно значительно выше. Имея в виду неразрывную связь между теплообменом и гидравлическим сопротивлением, можно предположить, что и закон теплообмена будет отклоняться от общей закономерности. По аналогии с гидравлическим сопротивлением в области передней кромки следовало бы ожидать более интенсивного теплообмена. Однако, в нашем экспериментальном исследовании средней и местной теплоотдачи в вышеуказанном интервале чисел  $Re$  такого отклонения не наблюдалось (см. рисунки 66, 73). Экспериментальные данные, полученные для пластины №№ 3, 4 в непосредственной близости от передней кромки, располагались ниже (см. таблицы 12–14 приложений). По-видимому, для разъяснения этого вопроса необходимо провести специальные исследования.

# 8 Экспериментальное исследование теплообмена в плоском канале

В данной главе рассматривается местная и средняя теплоотдача начального участка плоского канала из параллельных пластин, исследуются взаимосвязь между теплообменом начального участка параллельных пластин и одиночной пластины, местная и средняя теплоотдача плоского канала при установившемся течении. Представляются результаты по гидравлическому сопротивлению как в начальном участке параллельных пластин, так и при установившемся течении в плоском канале.

## 8.1. Местная теплоотдача начального участка параллельных пластин

Гидродинамический процесс, протекающий в начальном участке параллельных пластин, более сложен по сравнению с процессом в случае одиночной пластины. Полную аналогию между этими процессами можно наблюдать лишь в непосредственной близости от входа в канал, где соблюдается зависимость  $\delta \ll s$ . В более отдаленных от входа сечениях толщина пограничных слоев на стенках канала возрастает. Возрастание пограничных слоев протекает в других гидродинамических условиях, отличающихся от условий в случае одиночной пластины в бесконечном потоке. Иначе говоря, вследствие образования зон с меньшей скоростью у стенок канала и существования неразрывности течения жидкости скорость невозмущенного потока в середине вдоль канала возрастает и сопровождается образованием градиента давления. Эти два фактора и обуславливают особенности формирования пограничных слоев, процесса теплообмена и гидравлического сопротивления.

Прежде всего рассмотрим теплоотдачу начального участка параллельных пластин. Как подробно отмечалось в главе 6, в опытах применялась неизотермическая пластина, а температурный напор изменялся по закону  $\Delta t_x = Ax^{0,4}$ .

Исследования проводились в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла. Высота исследуемых каналов была 4, 10, 20, 50 мм. Скорость в потоке воздуха изменялась от 1,5 до 10 м/сек, а в потоках воды и трансформаторного масла — от 0,1 до 0,4 м/сек. При экспериментах с различными жидкостями был охвачен интервал изменения критерия  $Pr$  — от 0,7 до 580. Для определения коэффициента теплоотдачи использовалась та же самая пластина-калориметр, что и в случае исследования теплоотдачи одиночной пластины [70, 71].

Анализ экспериментальных данных по теплообмену показывает, что теплоотдача канала из параллельных пластин в основном зависит от геометрических характеристик этого канала.

С геометрией канала неразрывно связан характер изменения скорости невозмущенного потока и градиента давления. Это подтверждают и приведенные на рис. 78 экспериментальные данные. Из графика видно, что процесс

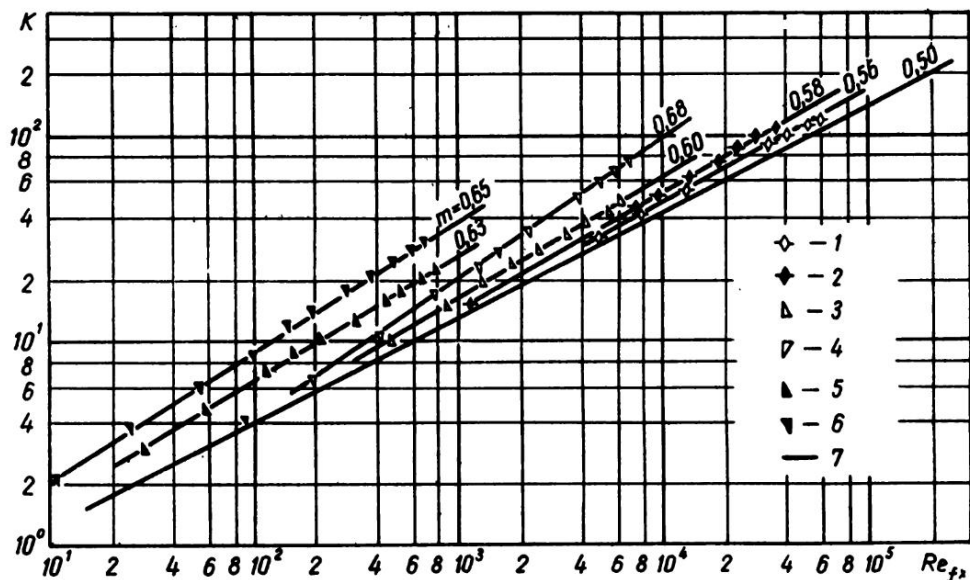


Рис. 78. Теплоотдача в начальном гидродинамическом участке параллельных пластин при различных  $h$ . 1, 2 — в потоке воды при  $h=20$  и  $10$  мм соответственно, 3–6 — в потоке трансформаторного масла при  $h=50, 20, 10$  и  $4$  мм, 7 — теплоотдача неизотермической пластины (7.4).  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

теплообмена в начальном участке проходит интенсивнее, чем теплообмен одиночной пластины. Интенсивность, как видно, зависит от расстояния между пластинами, а также и от координаты  $x$ . С уменьшением высоты канала  $h=2s$  показатель степени при числе  $Re_{fx}$  возрастает от  $m=0,56$  до  $m=0,68$ , что также указывает на увеличение теплоотдачи.

В нашем экспериментальном участке процесс теплоотдачи протекает при одновременном развитии гидродинамической и термической стабилизации. Подробный анализ наших экспериментальных данных и данных работ других исследователей показал, что теплоотдача канала из параллельных пластин пропорциональна параметру  $\frac{x}{h Re_{fx}}$  в степени 0,1 (рис. 79). На указанном графике экспериментальные данные отложены в виде функциональной зависимости:

$$Nu_{fx} Re_{fx}^{-0,5} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25} = f\left(\frac{x}{h Re_{fx}}\right). \quad (8.1)$$

Для построения этой зависимости за определяющий размер в критериях аналогично случаю одиночной пластины была принята локальная длина  $x$ ,

а в критерии  $Re_{fn}$  за определяющий размер принималась высота канала  $2s$  и за определяющую температуру — температура набегающего потока, так как нагрев жидкости при прохождении ее по каналу даже в случае максимальной тепловой нагрузки не превышал  $0,5^\circ\text{C}$ . За определяющую скорость принималась скорость набегающего потока.

Как видно из приведенных результатов, зависимость теплоотдачи в начальном участке с изменением физических свойств жидкости и скорости можно

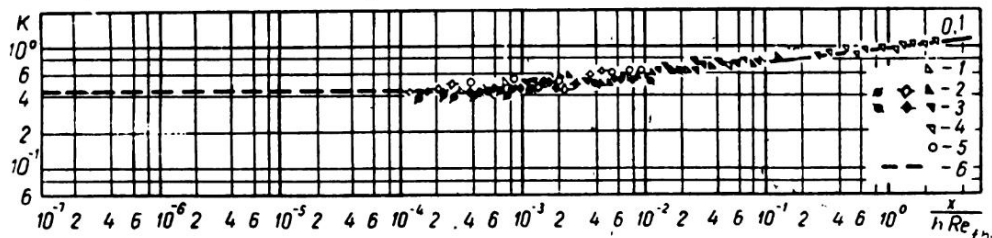


Рис. 79. Обобщение местной теплоотдачи гидродинамического начального участка параллельных пластин. 1 — в потоке трансформаторного масла при  $h=50$  мм, 2 — соответственно в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла при  $h=20$  мм, 3 — то же самое при  $h=10$  мм, 4 — в потоке трансформаторного масла при  $h=4$  мм, 5 — по экспериментальным данным работы [65], 6 — местная теплоотдача неизотермической пластины (7.4).  $K = Nu_{fx} Re_{fx}^{-0,5} Pr_f^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

учитывать аналогично случаю одиночной пластины, т. е. критериями  $Pr_f$  в степени 0,33 и  $Re_f$  в степени 0,5, а влияние температурного напора — параметром  $Pr_f/Pr_w$  в степени 0,25.

В окончательной обработке экспериментальные данные отложены на рис. 80. Как видно, результаты наших опытов при постоянном тепловом потоке на поверхности канала обобщаются зависимостью

$$Nu_{fx} = 0,98 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (x/h Re_{fn})^{0,1} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.2)$$

Эта зависимость может быть использована для определения теплоотдачи в интервале изменения числа  $Re_f$  от 10 до  $10^6$ .

На рис. 79 представлены данные по местной теплоотдаче пластины (7.4), которые, как видно, не зависят от параметра  $\frac{x}{h Re_{fn}}$ , учитывающего влияние условий входа на теплоотдачу. Они автомодельны относительно этого параметра. Анализ экспериментальных данных, представленных на рис. 79, показывает, что закономерность теплоотдачи в начальном участке канала из параллельных пластин асимптотически приближается к закону теплоотдачи неизотермической пластины. В этом случае процесс теплообмена, следуя экспериментальным данным, можно обобщить суммой зависимостей теплоотдачи, действительных на определенных участках изменения значений параметра  $\frac{x}{h Re_{fn}}$ .



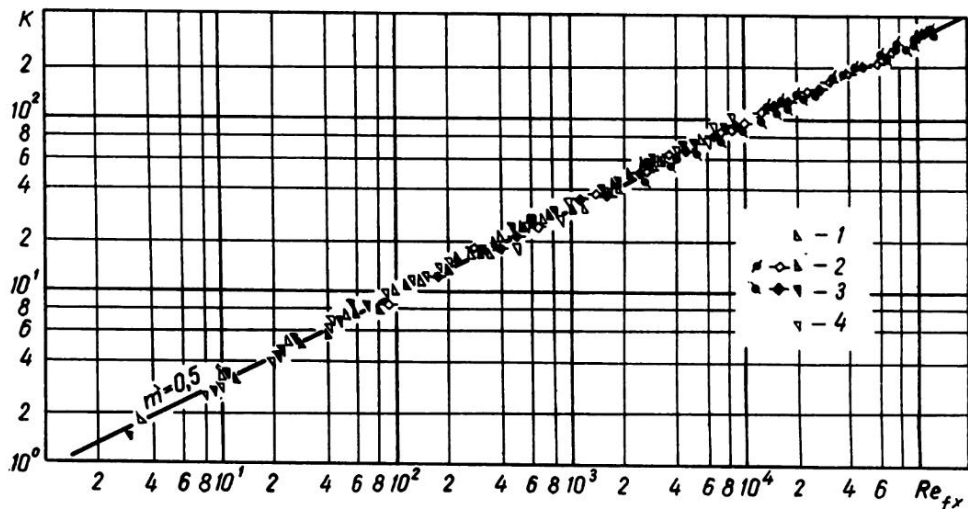


Рис. 80 Местная теплоотдача начального участка параллельных пластин. См. обозначения на рис. 79.  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} \left(\frac{x}{h Re_{fh}}\right)^{-0,1} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

Тогда зависимость для определения теплоотдачи примет вид:

$$Nu_{fx} = 0,43 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25} + c \left(\frac{x}{h Re_{fh}}\right)^{0,1} Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}, \quad (8.3)$$

или

$$Nu_{fx} = \left[0,43 + c \left(\frac{x}{h Re_{fh}}\right)^{0,1}\right] Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.4)$$

В этом уравнении константа  $c$  является переменной величиной, зависящей от параметра  $\frac{x}{h Re_{fh}}$ . Численные значения ее можно найти на графике рис. 81,

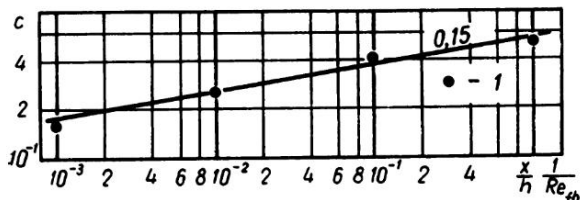


Рис. 81. Определение константы  $c$ . 1 — значения  $c$ , определенные по рис. 79

для построения которого использован график рис. 79. Тогда константа  $c$  может быть представлена зависимостью

$$c = c_1 \left( \frac{x}{h Re_{fh}} \right)^{0,15}. \quad (8.5)$$

После подстановки константы  $c$  в уравнение (8.4) для определения местной теплоотдачи начального участка параллельных пластин получаем:

$$Nu_{fx} = \left[ 0,43 + 0,55 \left( \frac{x}{h Re_{fh}} \right)^{0,25} \right] Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (8.6)$$

Данная зависимость характеризует теплоотдачу начального участка канала из параллельных пластин при постоянном тепловом потоке на стенке и изменении температурного напора по закону  $\Delta t_x = Ax^{0,4}$ .

Если принять влияние неизотермичности поверхности на теплоотдачу аналогичным как и в случае одиночной пластины, то при любой степенной неизотермичности для выражения теплоотдачи участка получаем:

$$Nu_{fx} = \left[ 0,33 + 0,42 \left( \frac{x}{h Re_{fh}} \right)^{0,25} \right] \chi Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (8.7)$$

Из уравнения (8.7) видно, что при малых значениях параметра  $\frac{x}{h Re_{fh}}$  оно превращается в зависимость для расчета теплоотдачи одиночной пластины.

Полученные зависимости и графические интерпретации, соответствующие экспериментальным данным в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла, показывают, что теплообмен в начальном участке канала из параллельных пластин более интенсивен, чем теплообмен одиночной пластины. Увеличение теплоотдачи в данном случае вызвано возрастанием скорости потенциального потока вдоль канала и образованием градиента давления. Градиент давления оказывает влияние на формирование пограничного слоя, уменьшая его толщину и увеличивая интенсивность теплоотдачи.

## 8.2. Средняя теплоотдача начального участка параллельных пластин

Средняя теплоотдача исследовалась в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла при расстояниях между пластинами  $2s=4, 10, 20, 50$  мм. Осреднение коэффициента теплоотдачи осуществлялось по второму методу (7.13), т. е. делением среднеинтегрального теплового потока на среднеинтегральный температурный напор.

Средняя теплоотдача при принятой методике обработки данных для местной теплоотдачи (8.6) была обобщена зависимостью (рис. 82):

$$Nu_f = 1,35 \left( \frac{l}{h Re_f h} \right)^{0,1} Re_f^{0,5} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^{0,25}. \quad (8.8)$$

Полученная зависимость может быть использована для определения средней теплоотдачи в диапазоне числа  $Re$  от  $2 \cdot 10^2$  до  $1,2 \cdot 10^6$ .

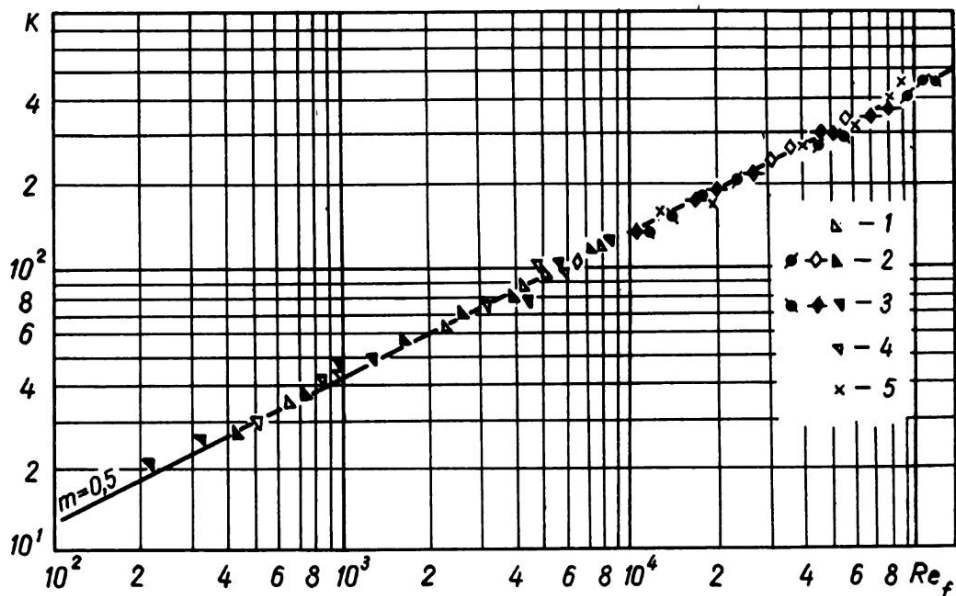


Рис. 82. Средняя теплоотдача гидродинамического начального участка параллельных пластин. 1–4 – обозначения см. на рис. 79, 5 – экспериментальные данные работы [66].

$$K = Nu_f Pr_f^{-0,33} \left( \frac{l}{h Re_f h} \right)^{-0,1} (Pr_f / Pr_w)^{-0,25}$$

Сравнение полученных зависимостей местной (8.2) и средней (8.8) теплоотдачи показывает, что в обоих случаях влияние гидродинамической стабилизации на теплоотдачу учитывается параметром  $\frac{x}{h Re_f h}$  в степени 0,1. В случае обобщения средней теплоотдачи вместо локальной длины  $x$  необходимо брать полную длину канала  $l$ , на которой ведется осреднение коэффициента теплоотдачи. Эта длина принимается и за определяющий размер.

### 8.3. Гидравлическое сопротивление начального участка плоского канала

Анализ течения жидкости в начальном участке канала из параллельных пластин или круглой трубы показывает, что энергия в этом процессе расходуется на преодоление сил трения и на ускорение потенциального потока. Некоторая незначительная часть энергии затрачивается на перераспределение скорости при входе в канал и выходе из него.

В основном гидравлическое сопротивление зависит от скорости потока, геометрических характеристик канала и от физических свойств потока. Основываясь на теории подобия, взаимосвязь этих всех факторов можно представить в виде критериального уравнения:

$$Eu = c \left( \frac{l}{dRe_{fd}} \right)^{k_1}. \quad (8.9)$$

В этом уравнении гидравлическое сопротивление характеризуется заключающимся в критерии  $Eu$  перепадом статического давления, определяемого на измеряемом участке канала. В нашем случае этот перепад измерялся перед и за блоком параллельных пластин (см. рис. 48).

Гидравлическое сопротивление исследовалось в потоке воздуха и трансформаторного масла при высоте канала 4 мм. Канал высотой 10 мм использовался при исследованиях в потоках воздуха, воды и трансформаторного масла, а канал высотой 20 мм — только при исследованиях в потоке трансформаторного масла. При обработке экспериментальных данных за определяющие величины принимались: температура  $t_f$ , скорость набегающего потока  $U$ , а также эквивалентный гидравлический диаметр  $d=2h$ .

Экспериментальные данные в такой обработке согласно уравнению (8.9) представлены на рис. 83. Из этого графика определялись неизвестные константа  $c$  и показатель степени  $k_1$  в уравнении (8.9). Согласно нашим данным гидравлическое сопротивление в интервале параметра  $\frac{l}{dRe_{fd}}$  от  $9 \cdot 10^{-4}$  до  $3 \cdot 10^{-2}$  обобщается зависимостью:

$$Eu = 11,0 \left( \frac{l}{dRe_{fd}} \right)^{0,56}. \quad (8.10)$$

Анализ данных, представленных на рис. 83, показывает, что при больших значениях параметра  $\frac{l}{dRe_{fd}}$  закон гидравлического сопротивления начального участка приближается к закону гидравлического сопротивления при установившемся течении в канале, а при малых значениях — к закону сопротивления одиночной пластины.

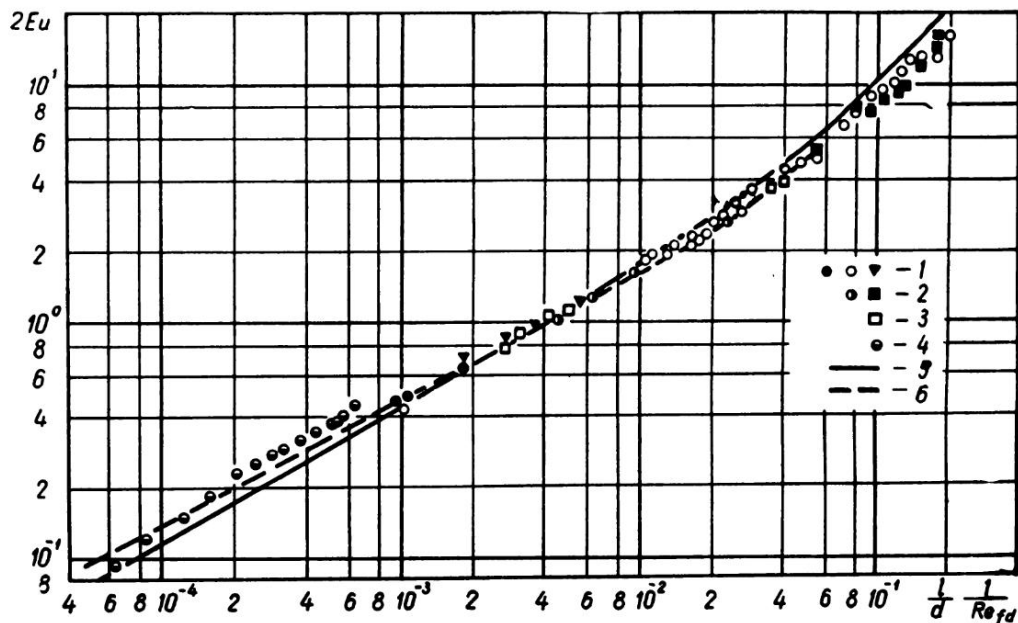


Рис. 83. Гидравлическое сопротивление начального участка плоского канала. 1 — соответственно в потоках воздуха, трансформаторного масла и воды при  $h=10$  мм, 2 — в потоках воздуха и трансформаторного масла при  $h=4$  мм, 3 — в потоке трансформаторного масла при  $h=20$  мм, 4 — по экспериментальным результатам работы [65], 5 — по теоретическим результатам работы [63], 6 — по теоретическим результатам работ [68, 93]

#### 8.4. Местная теплоотдача при гидродинамически установившемся течении в плоском канале

Экспериментальное исследование местной теплоотдачи при гидродинамически установившемся течении в плоском канале выполнено научным сотрудником института Н. Лютикасом в потоках трансформаторного масла и воды при высоте канала  $h \cong 5,4; 10,2$  мм. Результаты, полученные в потоке воды, относятся в основном к переходному режиму течения. Гидродинамическая стабилизация течения была осуществлена на необогреваемом участке длиной 1 м, аналогичном обогреваемому участку и установленном перед ним.

Результаты обработки экспериментальных данных (рис. 84) сначала были представлены в виде зависимости  $Nu_{fx} = f(x/d)$ . Как видно из рис. 84, характер кривых свидетельствует о наличии ламинарного течения в канале. Кривые распределения коэффициента теплоотдачи по длине канала сходны между собой

и расслаиваются в зависимости от величины числа  $Re_{fd}$ . Из графика видно, что теплоотдача в начале теплообменной части канала максимальна и по мере удаления от входа в канал быстро убывает.

Экспериментальные данные изучались и обрабатывались различными методами. При обработке учитывались результаты теоретического решения,

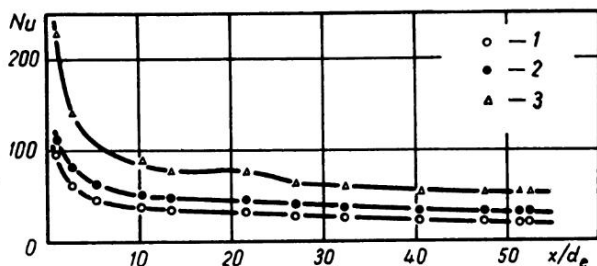


Рис. 84. Местная теплоотдача при гидродинамически установленном течении в плоском канале. 1 —  $Re=544$ , 2 —  $Re=1648$ , 3 —  $Re=5570$

представленного в главе 5. Для постоянного теплового потока на стенке  $q_w = \text{const}$  была получена зависимость для определения теплоотдачи в начальном термическом участке при гидродинамически установленном течении:

$$Nu_x = 1,183 \left( \bar{\beta} Pe \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.147)$$

В этой зависимости коэффициент  $\bar{\beta}$ , учитывающий влияние изменения вязкости с температурой, определялся для каждого сечения канала в зависимости от  $t_{w,x}$ . В критериях подобия  $Nu$  и  $Pe$  за определяющий размер принималась высота канала  $h$ , а за определяющую температуру — температура набегающего потока.

В такой обработке экспериментальные данные представлены на рис. 85. Как видно из рис. 85, экспериментальные данные весьма хорошо согласуются с кривой, соответствующей теоретическому решению.

Таким образом, полученная теоретическим путем расчетная зависимость дает возможность подсчитать теплоотдачу в плоском канале. Вместе с тем с точки зрения практического использования эта зависимость является не совсем удобной, а также не полностью характеризует процесс теплообмена в канале. В начальном термическом участке канала теплоотдача изменяется вдоль по каналу, как это видно из рис. 84. Анализ наших экспериментальных данных показал, что коэффициент теплоотдачи  $\alpha \sim x^{-0,33}$ . Поэтому следует считать, что за определяющий размер в начальном термическом участке при гидродинамически установленном течении следует принимать обогреваемую длину канала.

На наш взгляд, принятие такого определяющего размера в условиях термически нестабилизированного течения физически более оправдано по сравнению с общепринятым положением, когда за определяющий размер прини-

мается эквивалентный диаметр. Процесс развития теплоотдачи в начальном термическом участке подобен процессу этого развития на продольно обтекаемой пластине, где, как известно, за определяющую величину принимается длина или расстояние рассматриваемой точки от передней кромки. Основная разница лишь в том, что на пластине коэффициент теплоотдачи  $\alpha \sim U^{0,5}$ . При

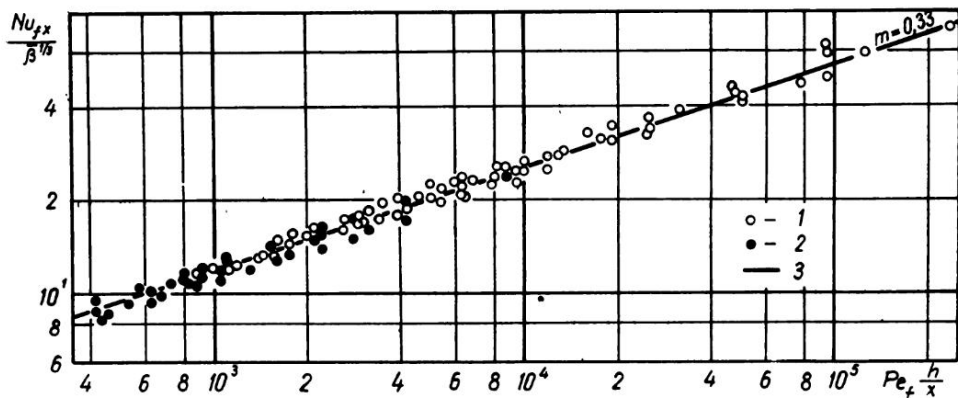


Рис. 85. Сопоставление экспериментальных данных местной теплоотдачи в плоском канале и данных теоретического решения. 1 — при  $h=10,2$  мм, 2 — при  $h=5,4$  мм, 3 — по уравнению (5.147)

входе в канал на некотором участке остается такая же пропорциональность. Далее, как видно из раздела 8.1 настоящей главы, интенсивность теплоотдачи несколько понижается и  $\alpha \sim U^{0,4}$ . Подробный анализ экспериментальных данных при гидродинамически установившемся течении показал, что коэффициент  $\alpha \sim U^{0,38}$ , т. е. отличается от ранее определенного значения  $m=0,5$  в случае ламинарного обтекания пластины. Закон пропорциональности  $\alpha \sim U^{0,38}$  нужно считать вполне закономерным явлением, так как процесс теплообмена протекает в условиях стабилизированного ламинарного течения в плоском канале.

За определяющую температуру, как и в предыдущем методе обработки, принимаем температуру набегающего потока  $t_f$ . Влияние рода жидкости и ее физических свойств на теплоотдачу в плоском канале, как и на пластине, учитывалось критерием  $Pr_f$  в степени 0,33.

В теоретической зависимости (5.147) определение коэффициента  $\bar{\beta}$  является трудоемким и учитывает изменение только вязкости от температуры. Поэтому, на наш взгляд, влияние изменения физических свойств жидкости от температуры и направления теплового потока на теплоотдачу следует учитывать соотношением  $Pr_f/Pr_w$  в соответствующей степени. Подробный анализ экспериментальных данных показал, что в случае нагревания показатель

степени равен 0,25, что соответствует ранее полученному значению для пластин и начального гидродинамического участка параллельных пластин.

Как видно из рис. 86, результаты опытов при постоянном тепловом потоке на поверхности канала обобщаются зависимостью:

$$Nu_{fx} = 1,05 Re_{fx}^{0,33} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{h}\right)^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.11)$$

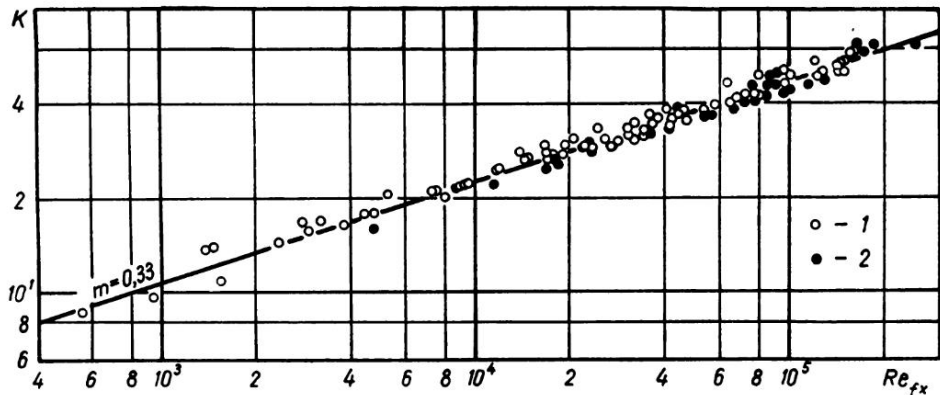


Рис. 86. Местная теплоотдача при гидродинамически установившемся течении в плоском канале. 1 — при  $h=10,2$  мм, 2 — при  $h=5,4$  мм.  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (x/h)^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

Влияние геометрии канала на процесс теплообмена учитывается параметром  $(x/h)^{0,33}$ , однако для прямоугольных каналов с различным соотношением сторон в указанный параметр  $x/h$  следует ввести эквивалентный диаметр. В таком случае зависимость (8.11) приобретает новый вид:

$$Nu_{fx} = 1,32 Re_{fx}^{0,33} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.12)$$

В указанных исследованиях число  $Re_{fx}$  изменялось от  $5 \cdot 10^2$  до  $2 \cdot 10^5$ ,  $Re_{fd}$  — от 500 до 3100, а  $Pr_f$  — от 120 до 310.

Сравнение полученных результатов по теплоотдаче при установившемся течении в плоском канале с результатами исследования теплоотдачи в начальном участке параллельных пластин плоского канала приведено на рис. 87.

Для сравнения использована ранее полученная зависимость (8.2)

$$Nu_{fx} = 0,98 Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{h Re_{fn}}\right)^{0,1} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.2)$$



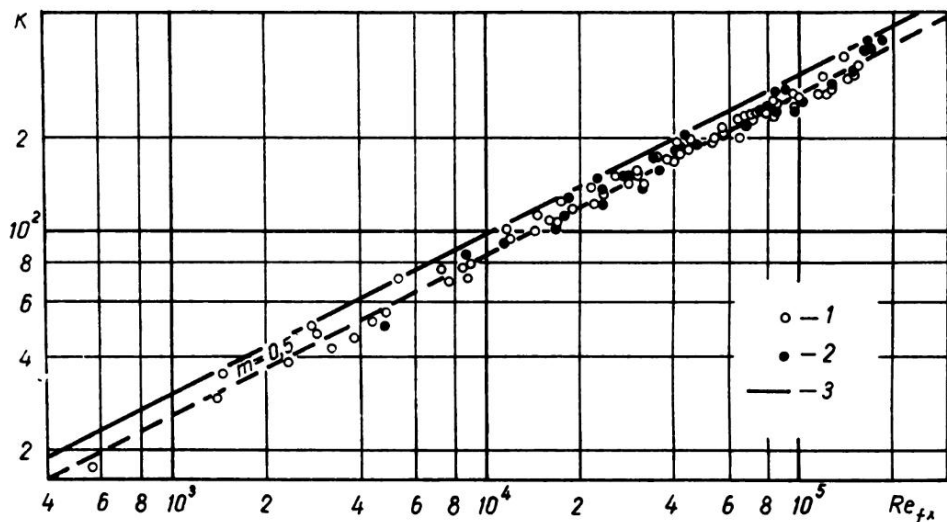


Рис. 87. Сопоставление теплоотдачи плоского канала при установившемся течении и теплоотдачи в начальном участке параллельных пластин. 1 — при  $h=10,2$  мм, 2 — при  $h=5,4$  мм, 3 — по (8.2).  $K = Nu_{fx} Pr_f^{-0,33} (x/h Re_{fx})^{-0,1} (Pr_f/Pr_w)^{-0,25}$

Как видно из рис. 87, экспериментальные результаты при гидродинамически установившемся течении располагаются значительно ниже результатов теплоотдачи в начальном участке плоского канала (8.2). Это говорит о влиянии начального развития гидродинамического пограничного слоя на интенсивность теплоотдачи.

### 8.5. Средняя теплоотдача при гидродинамически установившемся течении в плоском канале

Средняя теплоотдача, как и местная, исследовалась в основном в потоке трансформаторного масла при тех же высотах канала  $h=10,2$  и  $5,4$  мм. Осреднение коэффициента теплоотдачи осуществлялось по второму методу (7.13), т. е. делением среднеинтегрального теплового потока на среднеинтегральный температурный напор.

Средняя теплоотдача при принятой методике обработки данных для местной теплоотдачи была обобщена зависимостью (рис. 88):

$$Nu_f = 1,38 Re_f^{0,33} Pr_f^{0,33} \left(\frac{l}{h}\right)^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}. \quad (8.13)$$

Полученная зависимость может быть использована для определения средней теплоотдачи в диапазоне числа  $Re_f$  от  $10^4$  до  $2 \cdot 10^5$ .

Сравнение полученных зависимостей местной (8.11) и средней (8.13) теплоотдачи показывает, что в обоих случаях влияние геометрии канала учитывается параметром  $\left(\frac{l}{d}\right)^{0,33}$ . В случае обобщения средней теплоотдачи вместо

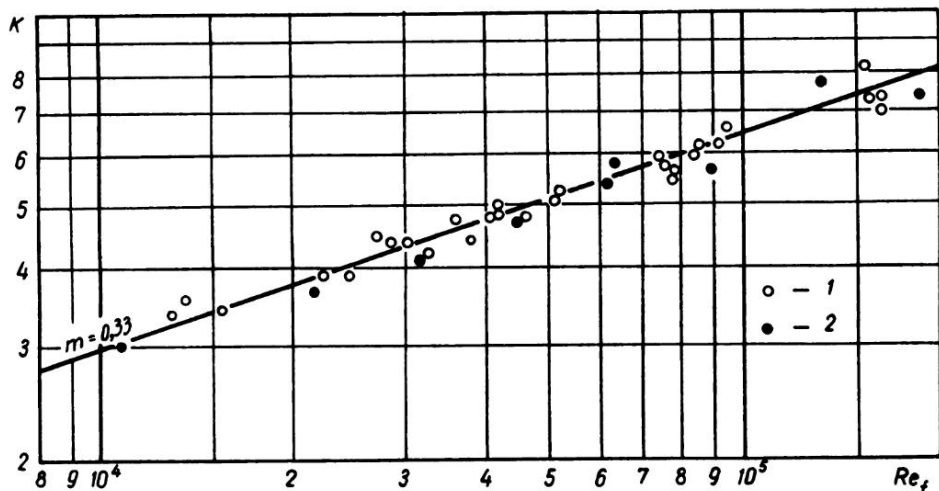


Рис. 88. Средняя теплоотдача при гидродинамически установившемся течении в плоском канале. 1 — при  $h=10,2$  мм, 2 — при  $h=5,4$  мм.  $K = Nu_f Pr_f^{-0,33} (l/h)^{-0,33} (Pr_f/Pr_w)^{-0,26}$

величины  $x$  необходимо брать полную длину  $l$ , на которой ведется осреднение коэффициента теплоотдачи. Эта длина принимается и за определяющий размер.

### 8.6. Гидравлическое сопротивление при установившемся течении в плоском канале

Среднее гидравлическое сопротивление измерялось на необогреваемом и обогреваемом участках плоского канала.

На рис. 89 представлено среднее сопротивление необогреваемого участка при изотермическом течении жидкости. Безразмерная длина измеряемого участка  $l/d=40,5$  ( $d=18,5$  мм). Первая точка отбора давления находилась в 200 мм от плавного входа в канал. Перепады статического давления измерялись на небольших участках ( $\approx 200$  мм) канала (см. рис. 50). Коэффициент гидравлического сопротивления подсчитывался по формуле:

$$f = \frac{2\Delta p d}{\rho U^2 l} \quad (8.14)$$

Как видно из рис. 89, опытные точки в ламинарной области течения ( $Re_{fd} < 2300$ ) хорошо совпадают с теоретической прямой  $f = 84,6 / Re_{fd}$  при  $s_1/h = 9,80$ . При значениях  $Re_{fd} > 2300$  результаты экспериментов отклоняются от теоретической прямой и далее резко переходят в турбулентную область

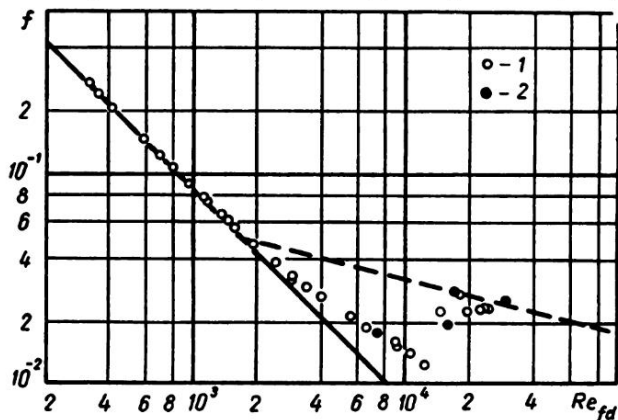


Рис. 89. Гидравлическое сопротивление на необогреваемом участке плоского канала. 1 — трансформаторное масло, 2 — вода

течения, где гидравлическое сопротивление выражается по закону Блазиуса  $f = 0,316 Re_f^{-0,25}$ .

Как видно, благодаря плавному входу турбулентный закон сопротивления входит в силу лишь при значениях  $Re_{fd} = 2 \cdot 10^4$ . Сравнение полученных данных с данными работы [102] показывает, что в нашем случае процесс перехода в турбулентное течение более затяжной. Это, по-видимому, можно объяснить меньшей турбулентностью набегающего потока.

На рис. 90 представлено среднее сопротивление в зависимости от  $Re_{fd}$  в ламинарной и переходной областях течения в нагреваемом участке. Безразмерная длина измеряемого участка  $l/d = 39,5$  ( $d = 19,00$  мм). На графике также нанесены результаты, полученные в изотермических условиях течения жидкости в этом участке при высотах канала  $h = 10,2$  и  $5,4$  мм.

Из рис. 90 следует, что при нагревании жидкости и при  $Re_{fd} = \text{const}$  с увеличением теплового потока или температурного напора  $\Delta t = t_w - t_f$  гидравлическое сопротивление уменьшается. Температурный напор в опытах изменялся от 0 до  $42^\circ\text{C}$ . Полученные прямые идут почти параллельно прямым, полученным в изотермическом случае, вплоть до  $Re_{fd} \approx 6000$ , дальше они резко изменяют направление.

При неизотермическом течении вязких жидкостей коэффициент сопротивления является функцией двух критериев:  $Re_f$  и  $Pr$ . Согласно формуле М. А. Михеева [24] при ламинарном режиме течения

$$f = \frac{A}{Re_f} (Pr_f / Pr_w)^{-\frac{1}{3}}. \quad (8.15)$$

На рис. 91 представлены в окончательной обработке опытные данные при неизотермическом ламинарном и переходном течениях жидкости с введением параметра  $(Pr_f/Pr_w)^{-\frac{1}{3}}$ , которым учитывается влияние температурного

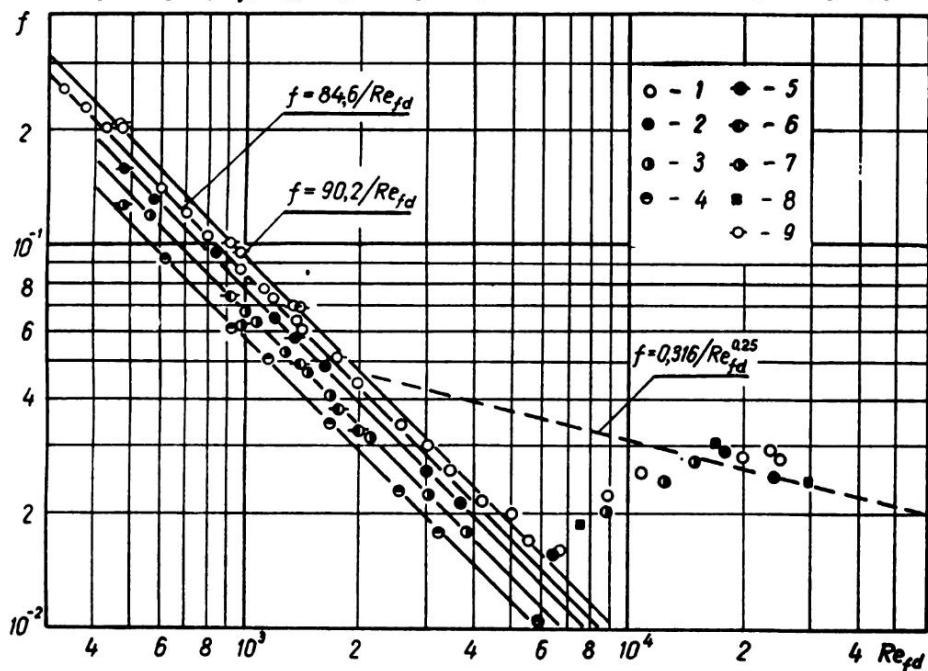


Рис. 90. Гидравлическое сопротивление на обогреваемом участке при гидродинамически установившемся течении в плоском канале. 1-4 — в потоке трансформаторного масла при  $h=10,2$  мм, 5-7 — в потоке трансформаторного масла при  $h=5,4$  мм, 8 — в потоке воды при  $h=10,2$  мм. 1 —  $\Delta t=0$ , 2, 5 —  $\Delta t=3-10^\circ\text{C}$ , 3, 6 —  $\Delta t=14-21^\circ\text{C}$ , 4, 7 —  $\Delta t=35-42^\circ\text{C}$ , 8 —  $\Delta t=3-5^\circ\text{C}$ , 9 — изотермическое течение при  $h=5,4$  мм

напора и направления теплового потока. Здесь наблюдаются хорошее обобщение опытных данных, полученных при разных значениях температурного напора, и достаточно четкое подтверждение зависимости (8.15).

Анализ экспериментальных данных показывает, что относительные погрешности результатов эксперимента составляют в среднем 6-7%.

### 8.7. Сопоставление полученных результатов

Сравнение результатов гидравлического сопротивления (рис. 92), полученных в плоском канале при гидродинамически установившемся течении, с результатами начального участка параллельных пластин показывает, что

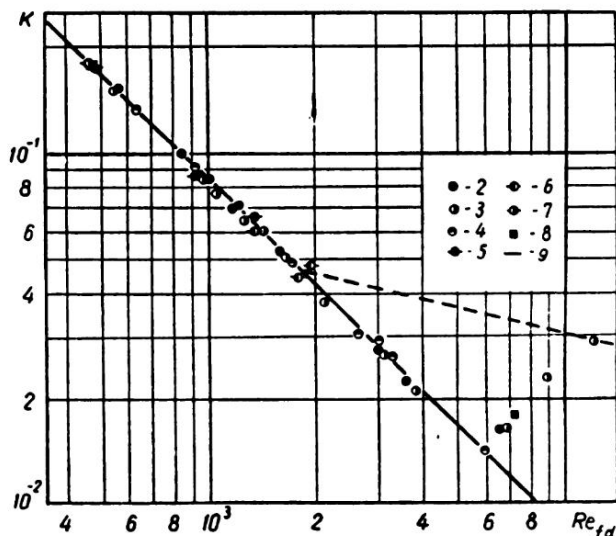


Рис. 91. Обобщение гидравлического сопротивления на обогреваемом участке при гидродинамически установившемся течении в плоском канале. 1-9 — обозначения см. на рис. 90.

$$K = \frac{f}{(Pr_w/Pr_f)^{\frac{1}{3}}}$$

законы изменения гидравлического сопротивления не совпадают. Совпадают лишь результаты, относящиеся к большим значениям параметра  $l/dRe_{fd}$ , где, по-видимому, и в канале параллельных пластин преобладало стабилизированное течение. В области гидродинамически установившегося течения для всех исследованных нами каналов сопротивление может быть обобщено зависимостью:

$$Eu = 42,3 \frac{l}{dRe_{fd}} (Pr_w/Pr_f)^{\frac{1}{3}}. \quad (8.16)$$

Течение в начальном участке параллельных пластин рассматривалось как изотермическое. В этом случае соотношение  $Pr_f/Pr_w = 1$ .

Сопоставление результатов теплоотдачи осуществлялось в ходе обработки экспериментальных данных. Оно отобразено на ранее приведенных графиках. Данные местной теплоотдачи начального участка плоского канала сопоставлялись (рис. 79) с теоретическими и экспериментальными данными работы [65]. Совпадение нужно считать хорошим. Результаты по средней теплоотдаче (рис. 82) сопоставлялись с данными исследования [66], представленными в нашей обработке.

Представленные на рис. 85 экспериментальные результаты по теплоотдаче в случае  $q_w = \text{const}$  в начальном термическом участке при гидродинамически установившемся течении в плоском канале достаточно хорошо подтверждают данные теоретического решения.

Сравнение полученных экспериментальных результатов в случае  $q_w = \text{const}$  при установившемся течении в плоском канале с полученными нами результатами в начальном участке параллельных пластин (рис. 87) указы-

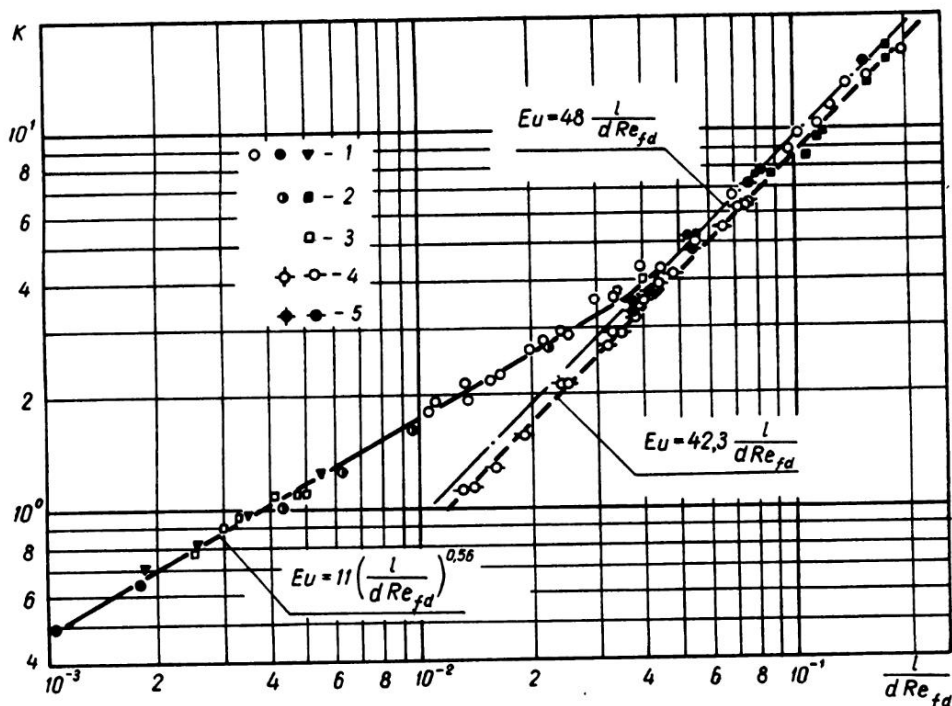


Рис. 92. Сопоставление гидравлического сопротивления плоского канала при установившемся течении в начальном участке. 1–3 – см. обозначения на рис. 83, 4 – изотермическое и неизотермическое течение в плоском канале при  $h=10,2$  мм, 5 – то же самое при  $h=5,4$  мм.  $K = 2Eu (Pr_f / Pr_w)^{-\frac{1}{3}}$

вает на то, что развитие гидродинамического пограничного слоя сильно влияет на теплоотдачу.

На рис. 93 сопоставлены результаты теоретического расчета среднего теплообмена в плоском канале для гидродинамически установившегося течения при  $T_w = \text{const}$  с опытными данными работы [75], полученными для прямоугольного канала, где  $s_1/h=5$  и  $l/h=226$ . Для расчета использована гиперболическая зависимость вязкости от температуры.

Несмотря на то, что опытные данные соответствуют сравнительно малым значениям  $Peh/l$ , при которых толщина теплового пограничного слоя соизме-

рима с  $s$  и расчетная формула (5.101) менее точна, опытные данные хорошо согласуются с результатами теоретического расчета.

Результаты гидравлического сопротивления начального участка плоско-го канала сравнивались с результатами, полученными рядом авторов (см. рис. 83). Наши экспериментальные данные хорошо согласуются с экспери-

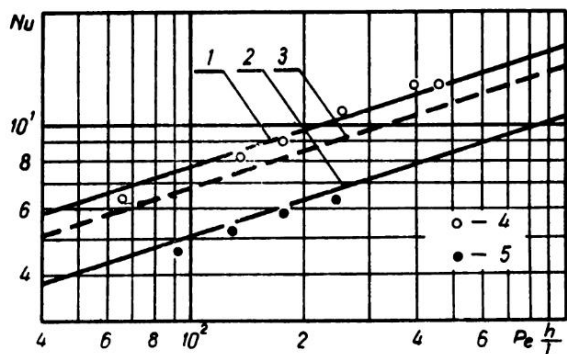


Рис. 93. Сопоставление результатов теоретического расчета по теплоотдаче и опытных данных при  $T_w = \text{const}$ . 1, 2 — по формуле (5.101) при  $t=1, 3$  — по формуле (5.101) при  $\beta=1$ , 4, 5 — опытные данные исследования [74]

ментальными данными работы [65], а также с теоретическими данными работы [68]. Из сопоставления, приведенного на рис. 92, видно, что закон гидравлического сопротивления в начальном участке параллельных пластин асимптотически приближается к закону сопротивления установившегося течения.

Результаты измерения гидравлического сопротивления при гидродинамически установившемся течении в плоском канале (рисунки 89, 91) в основном хорошо согласуются с результатами теоретического решения и с опытными данными других исследователей.

# 9 Заключение и практические рекомендации

Предыдущие главы нашей работы были посвящены детальному изучению процесса теплоотдачи и гидродинамических характеристик течения при ламинарном пограничном слое на пластине, а также при ламинарном течении жидкости в плоском канале.

Данная заключительная глава содержит общие выводы и некоторые практические рекомендации по расчету теплоотдачи, гидравлического сопротивления и гидродинамических характеристик при ламинарном обтекании пластины и ламинарном течении в плоских каналах.

## 9.1. Заключительные замечания

Настоящая работа посвящена вопросам теплоотдачи при ламинарном течении вязких жидкостей. Основное внимание сосредоточено на исследовании влияния рода жидкости, изменения физических свойств и температуры поверхности вдоль потока на интенсивность теплоотдачи. При изучении поставленных задач в работе применялся метод экспериментальных исследований в сочетании с теоретическими разработками.

При аналитических исследованиях применялись точные и приближенные методы решений с использованием современных электронно-вычислительных машин.

Обширные экспериментальные исследования с различными пластинами и каналами выполнены в потоках воздуха, воды, трансформаторного масла и глицерина в интервале значений  $Pr_f$  от 0,7 до 600. Экспериментальные исследования подтвердили теоретические решения в том смысле, что при ламинарном обтекании пластины влияние рода жидкости и ее физических свойств на теплоотдачу наилучшим образом учитывается критерием  $Pr$  в степени 0,33.

Одним из главных вопросов, рассматриваемых в наших исследованиях, был вопрос влияния направления теплового потока и температурного напора на теплоотдачу. Исследования показали, что теплоотдача при нагревании жидкости больше, чем при охлаждении, и что с увеличением температурного напора она увеличивается. Такая динамика процесса теплообмена обусловлена изменением физических свойств с изменением температуры и, главным образом, как показали подробные теоретические расчеты, с изменением вязкости. Из проведенных в Институте расчетов видно, что влияние изменения других физических свойств на теплоотдачу составляет лишь 2–7% от всего влияния.

Исследования показали, что влияние переменного поля вязкости и других физических свойств в пограничном слое хорошо учитывается ведением критерияльные уравнения симплекса  $Pr_f/Pr_w$  в соответствующей степени.



При этом за определяющую принимается температура жидкости вне пограничного слоя. Точные теоретические расчеты с помощью ЭВМ и подробный анализ экспериментальных данных привели к выводу, что для пластины в случае нагревания жидкости показатель степени при соотношении  $Pr_f/Pr_w$  в среднем равен 0,25, а в случае охлаждения — 0,19. Расчетами также установлено, что данные показатели в некоторой степени зависят от критерия  $Pr$  и незначительно повышаются при больших его значениях.

Подробно изучено влияние изменения температуры поверхности на теплоотдачу пластины. Исследовалась как местная, так и средняя теплоотдача. Установлено, что теплоотдача неизотермической по длине пластины существенно отличается от теплоотдачи изотермической пластины: при положительном продольном градиенте температуры поверхности теплоотдача неизотермической пластины протекает интенсивнее.

Применять зависимости теплоотдачи, полученные в случае изотермических по длине поверхностей, для определения теплоотдачи неизотермических поверхностей можно лишь условно, при значительном продольном градиенте температуры данное применение будет ошибочным.

При определении средней теплоотдачи неизотермических пластин большое внимание уделялось изучению методов осреднения, поскольку различные методы осреднения теплоотдачи приводят к различным результатам. На наш взгляд более приемлемым является второй метод (7.13).

Тщательные исследования указывают на сильное влияние начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины.

При обобщении результатов исследований по теплоотдаче пластины с необогреваемым начальным участком установлено, что при различных граничных условиях на поверхности ( $T_w = \text{const}$  и  $q_w = \text{const}$ ) в расчетах, требующих высокой точности, следует использовать различные параметры для учета влияния этого участка на теплоотдачу.

При обобщении опытных данных по местной теплоотдаче обнаружено, что в области передней кромки пластины теплоотдача отклоняется от общей закономерности. Однако, ссылаясь на полученные нами экспериментальные результаты, мы не можем делать каких-либо количественных обобщений относительно теплоотдачи в этой области. Результаты наших опытов лишь подтверждают, что протяженность пластины в области передней кромки, где общеизвестный закон теплоотдачи теряет силу, меньше той протяженности пластины, где закон сопротивления трения Блазиуса недействителен. Этот вопрос требует дальнейших тщательных экспериментальных и теоретических исследований.

Влияния свободной конвекции в наших экспериментальных исследованиях не наблюдалось, но при более значительных передачах температуры и малых вынужденных скоростях потока ее влияние на теплоотдачу пластины возможно. Поэтому для исследования вопроса сложного теплообмена с учетом

действия свободных гравитационных потоков необходимы специальные эксперименты.

Подробно исследована местная и средняя теплоотдача начального участка параллельных пластин. По существу это соответствует случаю теплоотдачи начального участка плоского канала. Установлено, что теплоотдача пластины в начальном участке параллельных пластин интенсивнее, чем теплоотдача одиночной пластины. Это обусловлено образованием градиента давления и изменением толщины пограничного слоя.

Влияние вышерассмотренных факторов на теплоотдачу параллельных пластин аналогично отмеченному их влиянию на теплоотдачу одиночной пластины.

Анализ экспериментальных данных показал, что теплоотдачу начального участка параллельных пластин можно определить аналогично теплоотдаче одиночной пластины. При этом основные параметры, определяющие теплоотдачу, принимаются те же, что и для пластины, а за определяющий размер принимается длина канала. Влияние геометрии канала на теплоотдачу учитывается дополнительным параметром.

При рассмотрении теплоотдачи плоского канала в случае установившегося режима ламинарного течения основное внимание было сосредоточено на изучении влияния изменения вязкости от температуры на теплоотдачу. Представлены приближенные аналитические решения теплоотдачи и гидравлического сопротивления как для начального термического участка, так и для участка термически стабилизированного течения жидкости.

Аналитические расчеты показывают, что при нагревании жидкости теплоотдача проходит интенсивнее, чем при охлаждении. Что касается скорости, то при охлаждении безразмерная скорость на оси канала изменяется более интенсивно, чем при нагревании жидкости.

Результаты экспериментальных исследований при  $q_w = \text{const}$  в основном подтвердились результатами аналитических расчетов теплоотдачи на ЭВМ для соответствующих случаев при установившемся течении в плоском канале. Вместе с тем, полученные эмпирические зависимости в отличие от аналитических более просты и удобны для практического применения.

Для исследования влияния изменения физических свойств на теплоотдачу при ламинарном пограничном слое и ламинарном течении в канале нами использовались как точные [61, 62, 91], так и приближенные интегральные [80, 81] аналитические методы с применением ЭВМ. Экспериментальные исследования, проводимые параллельно, подтвердились результатами данных аналитических решений.

Постановка экспериментов высокой точности в ламинарных потоках жидкостей сопряжена с известными трудностями. В связи с бурным развитием электронной вычислительной техники в будущем, по-видимому, упор следует делать на точных и приближенных аналитических методах расчета в сочетании

с немногочисленными экспериментальными исследованиями принципиального порядка.

В выполненных исследованиях нами преследовалась цель глубже вникнуть в сущность процесса теплоотдачи и выяснить основные факторы, влияющие на него. В окончательном же итоге мы стремились получить зависимости для практических расчетов необходимой точности и достаточной простоты.

## 9.2. Рекомендации по определению гидродинамических характеристик

**Обтекание пластины.** Используя точные и приближенные методы решения, по формулам (2.21) и (2.32) можно определить толщину гидродинамического пограничного слоя на пластине. Разница в результатах, полученных по этим формулам, составляет 8%. Однако предпочтение нужно отдать формуле (2.21), так как она получена в результате точного решения.

Для определения касательного напряжения на стенке и сопротивления трения пластины рекомендуются формулы (2.23), (2.25). Среднее сопротивление трения в области передней кромки пластины можно определить по формуле (2.65), так как для этой области обычные уравнения гидродинамического пограничного слоя недействительны, и формула (2.25), полученная в результате их решения, не может быть использована в данном случае.

Исследованию гидродинамических характеристик с применением полных уравнений гидродинамического пограничного слоя посвящен раздел 2.4. Методика, приведенная в этом разделе, позволяет определить распределение скорости в пограничном слое. Аналогичный расчет поля скоростей в пограничном слое на пластине с учетом изменения физических свойств жидкости с температурой может быть выполнен при использовании методики, изложенной в разделе 3.7.

**Течение в канале.** Возрастающую скорость изотермического течения на оси начального участка плоского канала можно подсчитать по формуле

$$U_0 = U \left[ 1 + 0,3 \frac{\delta}{s} + \left( 0,3 \frac{\delta}{s} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.18)$$

или определить из номограммы, приведенной на рис. 94.

Толщину пограничного слоя можно найти либо из зависимости (4.20), либо пользуясь графиком на рис. 27.

Для расчета гидравлического сопротивления начального участка плоского канала в интервале изменения параметра  $X$  от  $8 \cdot 10^{-3}$  до  $3 \cdot 10^{-2}$  рекомендуем пользоваться полученной нами эмпирической зависимостью

$$Eu = 11 \left( \frac{l}{dRe_{fd}} \right)^{0,56}, \quad (8.9)$$

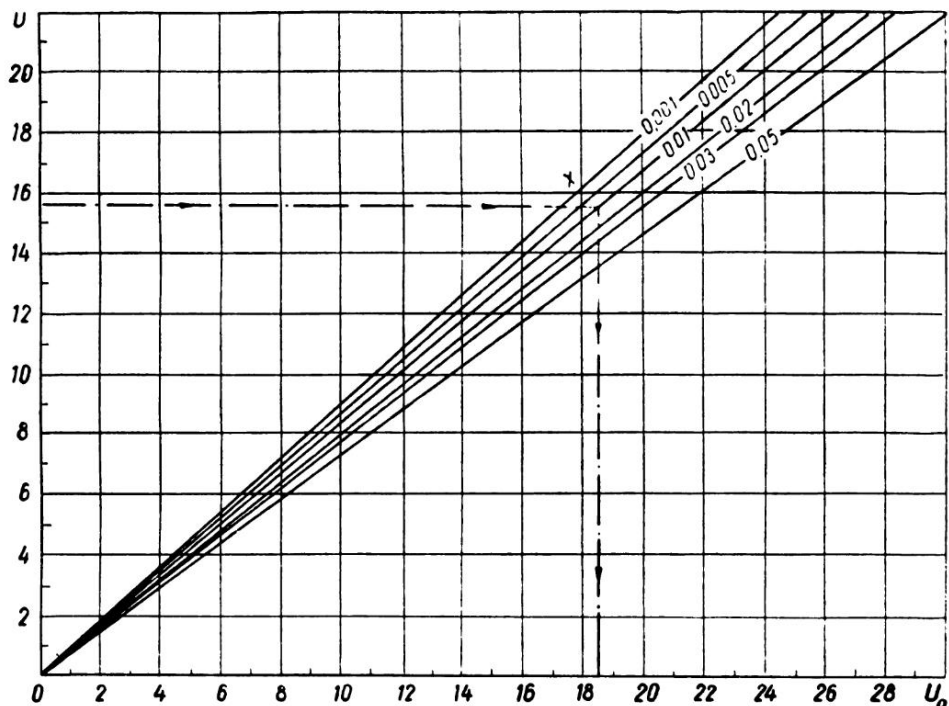


Рис. 94. Номограмма для определения скорости на оси в начальном участке плоского канала

которая хорошо согласуется с теоретическими решениями. На рис. 95 также представлена номограмма для определения гидравлического сопротивления. Значения параметра  $\frac{h}{s_1}$  заимствованы из работы [24].

Для расчета распределения скоростей в плоском канале при гидродинамически установившемся течении при различных граничных и термических условиях могут быть использованы зависимости (5.50), (5.68), (5.113), (5.134) и (5.135), а для расчета сопротивления трения – зависимости (5.51), (5.69) и (5.136).

В случае изотермического течения жидкости вышеприведенные зависимости превращаются в общеизвестные уравнения для распределения скорости

$$\bar{U} = 3(Y - Y^2/2) \tag{5.52}$$

и сопротивления трения

$$f = \frac{48}{Re} \tag{5.53}$$

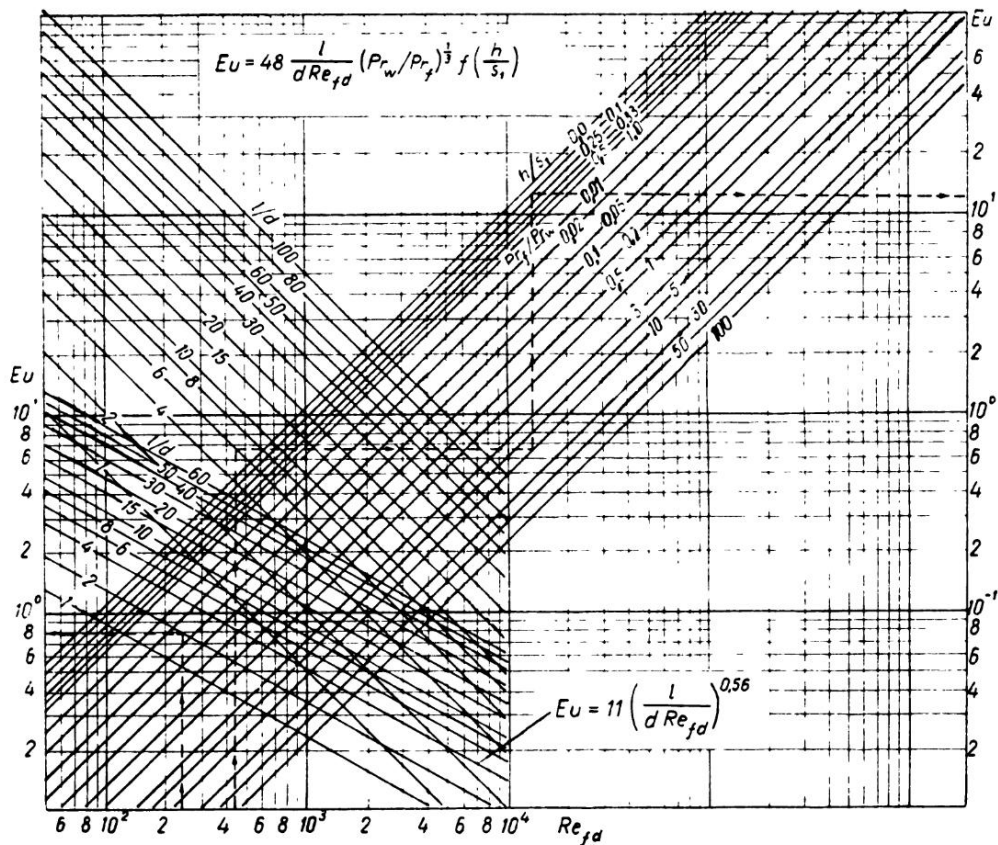


Рис. 95. Номограмма для определения гидравлического сопротивления в начальном участке и при гидродинамически установившемся течении в плоском канале

### 9.3. Рекомендации по расчету теплоотдачи

Как было отмечено выше, влияние направления теплового потока и температурного напора для жидкостей мы предлагаем учитывать параметром  $[Pr_f/Pr_w]^k$ . В случае нагревания жидкости в среднем  $k=0,25$ , а в случае охлаждения —  $k=0,19$ . Однако для большинства практических случаев с достаточной точностью как для нагревания, так и для охлаждения можно принимать  $k=0,25$ . На рис. 96 представлена номограмма для определения параметра  $[Pr_f/Pr_w]^k$ .

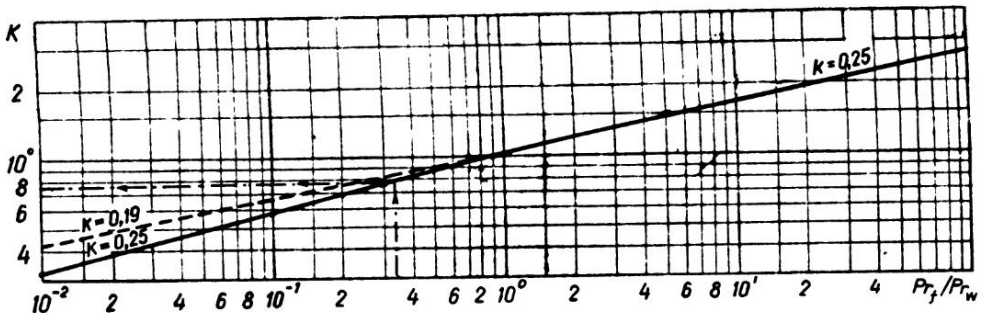


Рис. 96. Номограмма для определения значений параметра  $K = (Pr_f / Pr_w)^k$

**Теплоотдача пластины** в значительной мере зависит от граничных условий на стенке. При расчете коэффициента теплоотдачи необходимо обратить внимание на граничные условия, для которых рассчитывается этот коэффициент. В случае постоянной температуры стенки для расчета местной теплоотдачи при постоянных физических свойствах жидкостей можно использовать формулу (3.24).

Однако для точных расчетов местной теплоотдачи при переменных физических свойствах мы предлагаем пользоваться формулой, которая была получена в результате теоретических расчетов и подробного анализа наших экспериментальных данных:

$$Nu_{fx} = 0,33 Re_{fx}^{0,50} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^k. \quad (9.1)$$

Средняя теплоотдача пластины при заданном граничном условии определяется по формуле

$$Nu_f = 0,66 Re_f^{0,50} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^k. \quad (9.2)$$

В этом и последующих уравнениях подбор значений  $k$  зависит от требуемой точности расчетов и от направления теплового потока.

Для расчета местной теплоотдачи неизотермической по длине пластины при степенном распределении температур мы рекомендуем пользоваться зависимостью

$$Nu_{fx} = 0,33 \chi Re_{fx}^{0,50} Pr_f^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^k, \quad (9.3)$$

где значение коэффициента  $\chi$  следует брать из табл. 22 или из рис. 68 в зависимости от  $n_1$ .

В тех случаях, когда температура вдоль поверхности пластины и температурный напор меняются произвольно, для определения теплоотдачи необходимо пользоваться формулами (3.81) и (3.95).

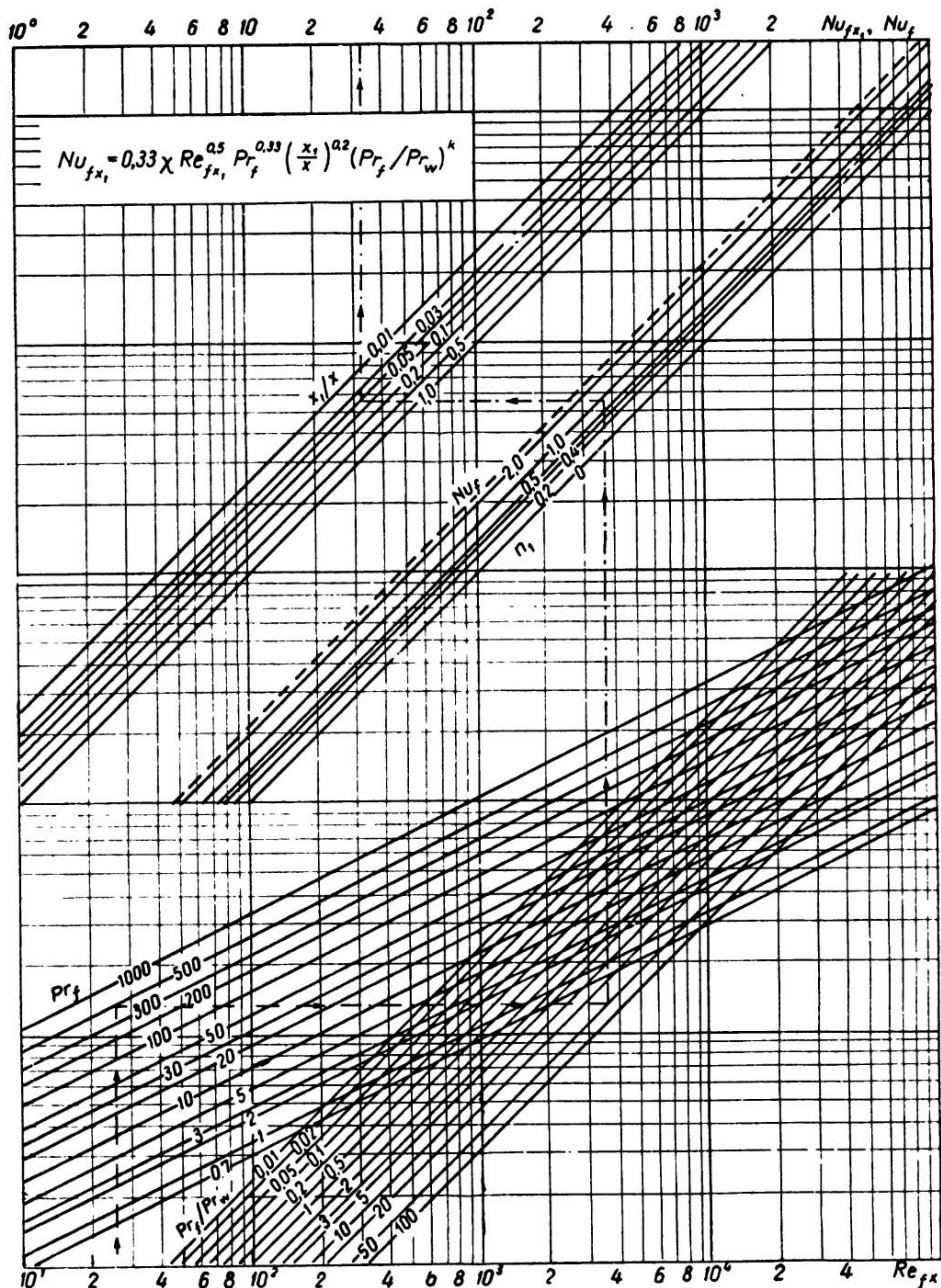


Рис. 97. Номограмма для определения коэффициентов местной и средней теплоотдачи пластины



Среднюю теплоотдачу неизотермической пластины согласно принятым законам определения можно получить из уравнения

$$Nu_f = 0,71 Re_f^{0,50} Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^k. \quad (7.14)$$

Отдельно нужно остановиться на вопросе расчета теплоотдачи пластины с необогреваемым начальным участком.

В случае, когда поверхность пластины с начальным необогреваемым участком имеет постоянную температуру, для расчета местной теплоотдачи можно использовать следующую формулу:

$$Nu_{f,x_1} = 0,33 Re_{f,x_1}^{0,50} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,14} (Pr_f/Pr_w)^k. \quad (9.4)$$

Расчет местной теплоотдачи неизотермической по длине пластины при  $q_w = \text{const}$  с учетом влияния необогреваемого начального участка следует вести по формуле

$$Nu_{f,x_1} = 0,33 \chi Re_{f,x_1}^{0,40} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2} (Pr_f/Pr_w)^k. \quad (7.10)$$

Средняя теплоотдача рассчитывается согласно эмпирическому уравнению (7.21), в котором влияние начального необогреваемого участка учитывается параметром  $l_1/l$  в степени 0,2.

Номограмма для расчета местной и средней теплоотдачи пластины в случае различных граничных условий на стенке приведена на рис. 97.

**Теплоотдача в плоском канале.** Для расчета местной теплоотдачи в начальном участке канала между параллельными пластинами при любой степенной неизотермичности стенки можно рекомендовать формулу

$$Nu_{f,x} = 0,75 \chi Re_{f,x}^{0,5} Pr_f^{0,33} (x/h Re_{f,h})^{0,1} (Pr_f/Pr_w)^k, \quad (8.2)$$

а также асимптотическую зависимость (8.7). Для расчета средней теплоотдачи может быть использована формула (8.8).

Местную и среднюю теплоотдачу начального участка плоского канала можно определить по представленной нами на рис. 98 номограмме, построенной по формуле (8.2).

В случае гидродинамически установившегося течения в плоском канале теплоотдача может быть определена как по формулам, полученным при теоретических решениях, так и по эмпирическим зависимостям, полученным по нашим экспериментальным данным.

Для определения местной теплоотдачи в начальном термическом участке при постоянном тепловом потоке рекомендуем пользоваться зависимостью

$$Nu_{f,x} = 1,32 Re_{f,x}^{0,33} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^k, \quad (8.12)$$

а для определения средней теплоотдачи — зависимостью (8.13).



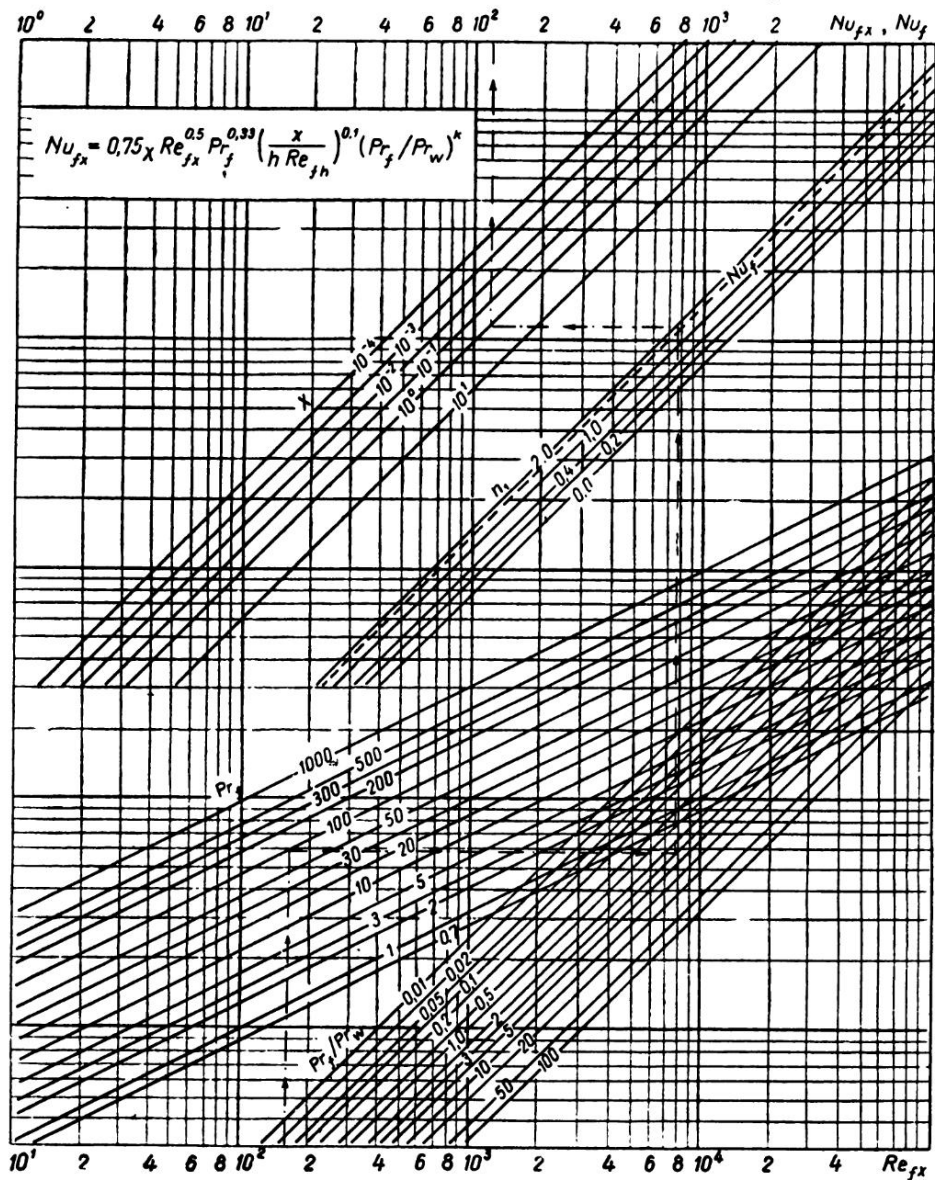


Рис. 98. Номограмма для определения местной и средней теплоотдачи в начальном участке параллельных пластин

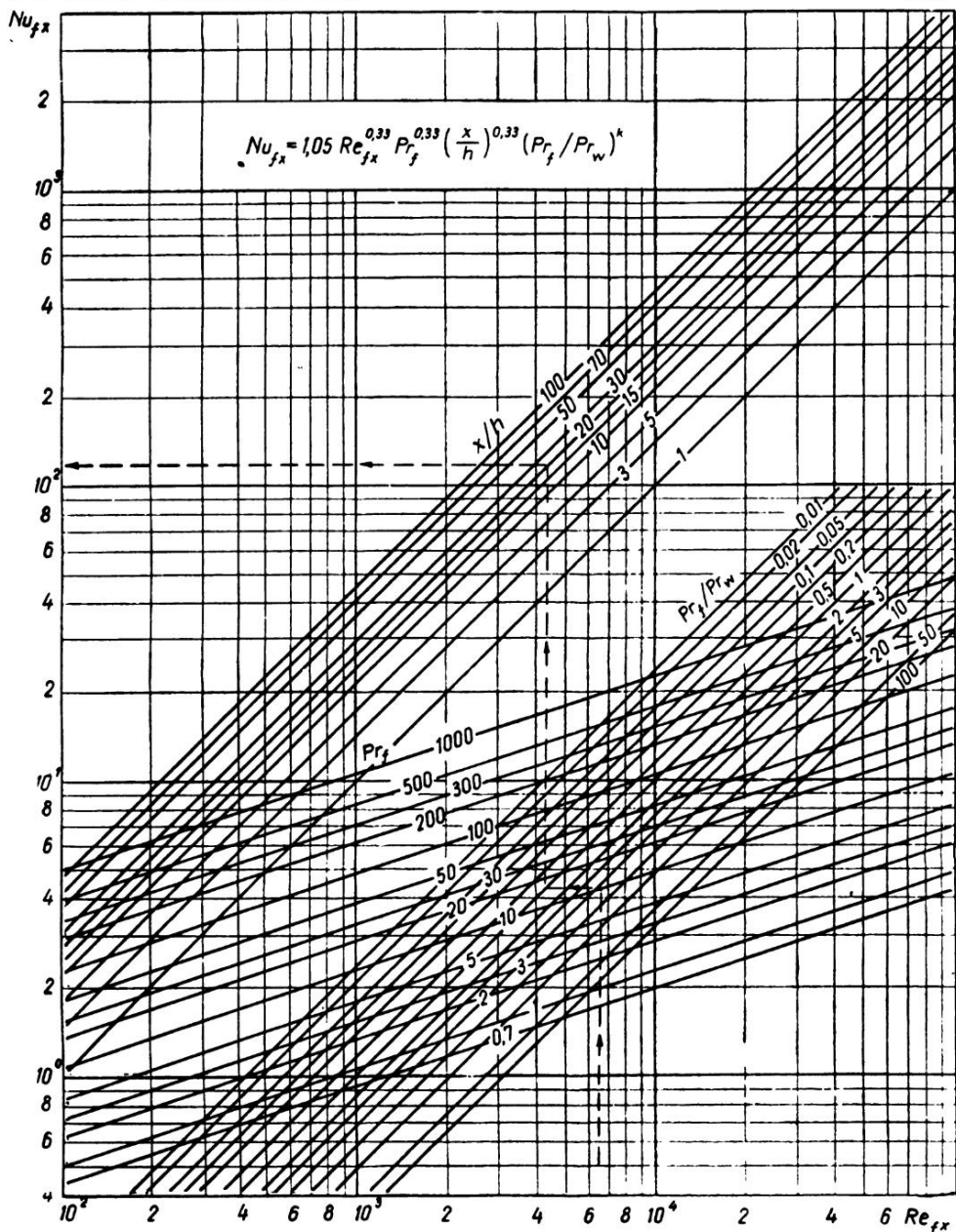


Рис. 99. Номограмма для определения местной теплоотдачи в плоском канале при гидродинамически установившемся течении

Местную теплоотдачу в области начального термического участка при  $T_w = \text{const}$  можно определить по формуле:

$$Nu_{fx} = 1,10 Re_{fx}^{0,33} Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,33} (Pr_f / Pr_w)^k. \quad (9.5)$$

Номограмма для расчета местной теплоотдачи в плоском канале при гидродинамически установившемся течении приведена на рис. 99.

# Приложения

## 1. Данные теоретических расчетов

Таблица 1

						Гамма-функция	
$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$	$x$	$\Gamma(x)$
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191
01	0,9943	26	0,9044	51	0,8866	76	0,9214
02	0,9888	27	0,9025	52	0,8870	77	0,9238
03	0,9835	28	0,9007	53	0,8876	78	0,9262
04	0,9784	29	0,8990	54	0,8882	79	0,9288
1,05	0,9735	1,30	0,8975	1,55	0,8889	1,80	0,9314
06	0,9687	31	0,8960	56	0,8896	81	0,9341
07	0,9641	32	0,8946	57	0,8905	82	0,9368
08	0,9597	33	0,8934	58	0,8914	83	0,9397
09	0,9555	34	0,8922	59	0,8924	84	0,9426
1,10	0,9513	1,35	0,8911	1,60	0,8935	1,85	0,9456
11	0,9474	36	0,8902	61	0,8947	86	0,9487
12	0,9436	37	0,8893	62	0,8959	87	0,9518
13	0,9399	38	0,8885	63	0,8972	88	0,9551
14	0,9364	39	0,8878	64	0,8986	89	0,9584
1,15	0,9330	1,40	0,8873	1,65	0,9001	1,90	0,9618
16	0,9298	41	0,8868	66	0,9017	91	0,9652
17	0,9267	42	0,8864	67	0,9033	92	0,9687
18	0,9237	43	0,8860	68	0,9050	93	0,9724
19	0,9209	44	0,8858	69	0,9068	94	0,9761
1,20	0,9182	1,45	0,8857	1,70	0,9086	1,95	0,9799
21	0,9156	46	0,8856	71	0,9106	96	0,9837
22	0,9131	47	0,8856	72	0,9126	97	0,9877
23	0,9107	48	0,8857	73	0,9147	98	0,9917
24	0,9085	49	0,8859	74	0,9168	99	0,9958
1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191	2,00	1,0000

Значения гамма-функции для  $x < 1$  и для  $x > 2$  могут быть вычислены с помощью формул:

$$\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x, \quad \Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1).$$

Таблица 2  
Значения  $\frac{\mu}{U} = f(\eta)$  на пластине согласно [62]

$U, \text{ м/сек}$ $\nu, \text{ м}^2/\text{сек}$ $x, \text{ м}$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$	$\frac{\mu}{U}$	$\eta$
$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,177, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$
$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$0,677, 27 \cdot 10^{-6}, 10,0$
$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$	$5,63 \cdot 10^{-6}, 10,0$
$0,001$	0,013	0,008	0,016	0,025	0,016	0,028	0,016	0,039	0,025	0,091	0,059	0,112	0,072	0,358
$0,005$	0,064	0,041	0,125	0,125	0,081	0,140	0,090	0,194	0,125	0,458	0,294	0,559	0,358	0,5
$0,01$	0,128	0,083	0,250	0,250	0,102	0,280	0,181	0,388	0,249	0,917	0,569	1,120	0,678	0,5
$0,02$	0,256	0,165	0,500	0,500	0,321	0,560	0,359	0,775	0,489	1,835	0,958	2,24	1,050	0,5
$0,03$	0,384	0,247	0,751	0,751	0,474	0,841	0,527	1,115	0,699	2,75	1,080	3,36	1,126	0,5
$0,05$	0,640	0,408	1,250	1,250	0,742	1,400	0,808	1,935	0,987	4,58	1,093	5,60	1,060	0,5
$0,07$	0,896	0,558	1,750	1,750	0,935	1,960	0,993	2,71	1,106	6,42	1,040	7,83	1,020	0,5
$0,08$	1,025	0,628	2,00	2,00	1,002	2,25	1,501	3,10	1,124	7,33	1,026	8,95	1,011	0,5
$0,1$	1,280	0,755	2,50	2,50	1,087	2,85	1,112	3,88	1,117	9,17	1,010	-	-	0,5
$0,2$	2,56	1,083	5,00	5,00	1,078	5,60	1,059	7,75	1,021	-	-	-	-	0,5
$0,3$	3,84	1,118	7,51	7,51	1,023	8,41	1,015	-	-	-	-	-	-	0,5

Таблица 3

Профили скоростей в начальном термическом участке плоского канала при охлаждении масла ( $T_w = \text{const}$ )

$\gamma$	$\Delta=0; \bar{X}=0$	$\Delta=0,2; \bar{X}=42 \cdot 10^{-6}$		$\Delta=0,5; \bar{X}=800 \cdot 10^{-6}$	
	$\sigma$ по (5.52)	$\sigma$ по (5.38)	$\sigma$ по [78]	$\sigma$ по (5.38)	$\sigma$ по [78]
0,05	0,146	0,017	0,022	0,010	0,017
0,10	0,285	0,089	0,083	0,038	0,057
0,20	0,540	0,388	0,331	0,182	0,202
0,40	0,960	0,936	0,908	0,755	0,713
0,60	1,260	1,328	1,334	1,384	1,353
0,80	1,440	1,563	1,585	1,740	1,767
1,00	1,500	1,641	1,668	1,860	1,905

Таблица 4

Значения  $U_0 = \varphi \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} \right)$  на оси плоского канала

$\frac{\mu_f}{\mu_w}$	по (5.88)	$U_0$	$\frac{\mu_f}{\mu_w}$	по (5.88)	$U_0$
1000		1,250	1		1,500
100		1,254	0,5		1,607
50		1,258	0,2		1,731
20		1,260	0,1		1,793
10		1,289	0,05		1,831
5		1,324	0,02		1,857
2		1,406	0,01		1,866
1		1,500	0,001		1,974

Таблица 5

Значения  $\beta = \varphi \left( \frac{\mu_f}{\mu_w} \right)$  для плоского канала

$\frac{\mu_f}{\mu_w}$	по (5.91)	$\bar{\beta}$	$\frac{\mu_f}{\mu_w}$	по (5.91)	$\bar{\beta}$
1000		1,666	1		1,000
100		1,656	0,5		0,714
50		1,645	0,2		0,385
20		1,613	0,1		0,217
10		1,563	0,05		0,116
5		1,471	0,02		0,049
2		1,250	0,01		0,025
1		1,000	0,001		0,002

Таблица 6

Профили температур в начальном термическом участке канала при нагревании глицерина ( $q_w = \text{const}$ )

$\xi$	$\vartheta_1$ по (5.109)		$\vartheta_2$ по (5.129)	
	$\Delta = 0,20$	$\Delta = 0,50$	$\Delta = 0,20$	$\Delta = 0,50$
0	0,1000	0,2500	0,0929	0,2334
0,1	0,0802	0,2005	0,0731	0,1842
0,2	0,0614	0,1536	0,0549	0,1389
0,3	0,0446	0,1115	0,0393	0,0998
0,4	0,0302	0,0756	0,0268	0,0686
0,5	0,0187	0,0469	0,01739	0,0451
0,6	0,0102	0,0256	0,01071	0,0281
0,7	0,0046	0,01168	0,00616	0,01643
0,8	0,0014	0,00360	0,00315	0,00854
0,9	0,00019	0,00047	0,00121	0,00334
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица 7

Профили температур с установившимся теплообменом при нагревании глицерина ( $q_w = \text{const}$ )

$\bar{X}$	$Y$	$\vartheta_1$ по (5.137)	$\vartheta_2$ по (5.139)
0,1	0	0,776	0,776
—	0,2	0,583	0,581
—	0,4	0,427	0,411
—	0,6	0,327	0,282
—	0,8	0,283	0,202
—	1,0	0,276	0,175
0,2	0	1,176	1,176
—	0,2	0,983	0,980
—	0,4	0,827	0,808
—	0,6	0,727	0,676
—	0,8	0,683	0,593
—	1,0	0,676	0,565

## 2. Теплофизические свойства жидкостей

Таблица 8

Физические свойства воздуха

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$c_p \cdot 10^{-3}, \text{дж/кг} \cdot \text{град}$	$\lambda \cdot 10^3, \text{вт/м} \cdot \text{град}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{сек}$	$Pr$
10	1,247	1,005	2,51	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,97	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,06	22,10	0,690

Таблица 9

Физические свойства воды

10	999,7	4,19	57,5	1,306	9,52
20	998,2	4,18	59,9	1,006	7,02
30	995,7	4,17	61,8	0,805	5,42
40	992,2	4,17	63,4	0,659	4,31
50	988,1	4,17	64,8	0,556	3,54
60	983,2	4,18	65,9	0,478	2,78
70	977,8	4,19	66,8	0,415	2,55
80	971,8	4,20	67,5	0,365	2,21
90	965,3	4,21	68,0	0,326	1,95

Таблица 10

Физические свойства трансформаторного масла

10	888	1,665	11,75	47,5	600
20	822	1,733	11,57	30,2	400
30	875	1,802	11,48	19,00	261
40	869	1,857	11,36	12,92	183
50	862	1,918	11,28	9,20	134
60	856	1,975	11,18	6,81	103
70	850	2,04	11,07	5,23	83
80	843	2,10	10,98	4,32	70

Таблица 11

Физические свойства глицерина

40	1245	2,45	0,2815	180	1960
60	1228	2,56	0,284	56,9	634
80	1211	2,67	0,287	22,9	257
100	1194	2,78	0,289	11,15	128,5
120	1175	2,89	0,2915	6,32	74,5
140	1160	3,00	0,294	3,91	46,2



### 3. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче пластины в потоках трансформаторного масла, воды и воздуха

Таблица 12

Поток трансформаторного масла при  $l_0=0$ 

$x$ , мм	$t_{\text{вл}}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_w^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
<b>Опыт 1</b> <span style="float: right;"><math>U=0,131</math> м/сек; <math>t_f=14,6^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=502</math></span>						
1	22,2	643	5,5	3,4	363	0,64
3	25,3	463	11,9	10,7	295	1,31
7	29,1	340	20,5	26,1	271	2,21
15	34,0	255	32,8	59,2	266	3,39
28	39,3	200	48,2	118	118	4,70
40	42,5	177	60,9	177	169	5,81
55	44,8	164	77,5	271	157	7,32
77	49,7	141	93,3	403	133	8,40
107	53,8	126	116	586	120	10,1
134	56,7	118	135	791	111	11,6
166	59,9	109	156	1030	103	13,2
198	60,6	108	183	1340	101	15,3
<b>Опыт 3</b> <span style="float: right;"><math>U=0,094</math> м/сек; <math>t_f=15,0^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=494</math></span>						
1	24,4	516	4,4	2,5	330	0,51
3	27,2	395	10,3	8,0	297	1,15
7	31,2	301	18,2	20,0	250	1,93
15	36,5	227	29,3	44,5	206	2,98
28	41,9	180	43,4	90,5	171	4,22
40	45,6	160	55,0	136	155	5,21
55	48,0	147	69,3	200	140	6,40
77	53,3	127	84,2	290	120	7,45
107	58,1	113	104	472	107	8,94
166	64,6	98	140	880	93	11,7
198	67,1	94	159	1120	89	13,2
<b>Опыт 5</b> <span style="float: right;"><math>U=0,058</math> м/сек; <math>t_f=14,4^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=508</math></span>						
1	23,0	434	3,7	1,5	356	0,43
3	25,5	337	8,7	4,8	320	0,97
7	29,2	253	15,2	12,0	270	1,62
15	34,3	189	24,3	28,3	268	2,59
28	39,5	149	35,9	57,9	190	3,52
40	42,8	132	45,2	91,5	165	4,28
77	50,2	105	69,2	216	133	6,21
107	54,3	94	86,4	358	120	7,54
134	57,3	88	101	493	109	8,57
166	60,5	81	116	700	101	9,74
198	63,1	77	131	920	95	10,8

Продолжение таблицы 12

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
Опыт 8			$U=0,262$ м/сек; $t_f=41,5^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=175$			
1	47,3	861	7,6	21,5	145	1,30
3	49,2	642	17,0	66,0	137	2,85
7	52,2	461	25,5	157	124	4,64
15	55,8	341	45,0	344	111	7,17
28	59,9	270	66,6	656	102	10,4
40	62,4	237	83,2	950	97	12,8
55	64,2	218	105	1340	93	16,1
77	68,5	177	124	1920	93	19,0
107	72,0	161	152	2760	81	22,3
134	74,6	150	176	3530	79	25,6
166	77,1	127	186	4500	75	26,9
198	79,0	132	230	5450	72	32,8
211	77,6	137	254	5900	73	36,4
Опыт 10			$U=0,190$ м/сек; $t_f=41,6^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=174$			
1	42,5	641	5,6	16	170	1,00
3	42,8	502	13,3	48	170	2,46
7	43,2	361	22,3	114	165	3,94
15	43,7	276	36,4	250	163	6,41
28	44,5	199	49,0	483	156	8,55
40	44,6	190	65,2	705	156	11,4
55	45,8	170	82,3	990	155	14,4
77	45,7	140	94,4	1430	152	16,5
107	46,3	122	115	2060	150	19,9
134	46,7	111	132	2640	148	22,9
166	47,2	103	151	3380	146	26,1
198	47,5	97	170	4120	145	29,4
211	47,3	95	198	4410	146	34,2
Опыт 11			$U=0,142$ м/сек; $t_f=41,8^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=172$			
1	48,8	616	5,4	12,0	137	0,92
3	51,4	450	10,9	36,6	127	1,83
7	54,6	337	20,8	87,2	117	3,44
15	58,6	257	34,0	188	106	5,45
28	62,8	207	50,8	373	97	7,94
40	65,8	180	63,5	544	91	9,75
55	67,9	165	80,3	781	88	12,3
77	72,6	140	95,2	1100	81	14,2
107	76,4	125	118	1630	78	17,4
134	79,0	116	137	2130	76	20,2
166	81,5	109	159	2780	75	23,3
198	82,6	106	185	3400	74	27,0

Продолжение таблицы 12

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nuf_x$	$Ref_x$	$Pr_w$	$\frac{Nuf_x}{Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
<b>Опыт 12</b> <span style="float: right;"><math>U=0,081</math> м/сек; <math>t_f=41,5^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=175</math></span>						
1	44,8	507	4,5	6,6	157	0,78
3	45,8	395	10,4	21,4	151	1,79
7	47,5	283	17,4	50,4	145	2,98
15	49,7	207	27,3	112	133	4,56
28	52,1	160	39,5	220	125	6,47
40	53,7	128	44,9	325	120	7,29
55	54,8	116	56,2	460	117	9,07
77	57,5	106	71,9	680	109	11,4
107	59,8	92	87,4	1000	103	13,7
134	61,2	86	101	1310	100	15,7
166	63,0	79	116	1690	96	17,9
198	64,1	75	131	2120	93	20,0
211	63,3	78	145	2300	95	22,1
<b>Опыт 13</b> <span style="float: right;"><math>U=0,286</math> м/сек; <math>t_f=58,9^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=105</math></span>						
1	62,2	805	7,1	41	99	1,49
3	63,3	770	20,6	125	95	4,29
7	64,8	450	28,2	293	92	5,77
15	66,6	349	46,8	640	90	9,56
28	68,5	277	69,2	1210	85	13,9
40	69,6	248	88,7	1750	84	17,9
77	73,1	187	129	3480	80	25,5
134	76,5	151	181	6260	75	35,3
198	78,7	134	236	9500	72	45,6
211	78,4	136	256	10200	71	49,4
<b>Опыт 14</b> <span style="float: right;"><math>U=0,184</math> м/сек; <math>t_f=10,8^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=456</math></span>						
24	22,9	186	41	125	260	4,63
49	22,9	105	46	252	260	5,23
73	22,9	92	61	377	260	6,84
98	22,9	85	75	503	260	8,49
122	22,8	73	80	626	260	9,00
146	22,8	63	83	752	260	9,40
171	22,9	57	87	878	260	9,85
<b>Опыт 15</b> <span style="float: right;"><math>U=0,333</math> м/сек; <math>t_f=41,5^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=135</math></span>						
24	13,0	181	40,7	860	405	10,5
49	13,0	123	55,5	1720	410	14,2
73	13,0	100	67,5	2580	405	17,3
98	13,1	84,5	76,0	3440	403	19,4
122	13,0	73,3	82	4290	406	21,1
146	13,0	96,1	129	5150	406	33,3
171	13,0	86,3	135	6010	406	34,6

Таблица 13

Поток воды  $l_0 = 0$ 

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_{x1}$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nuf_x$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nuf_x}{Pr_w^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
Опыт 17			$U = 0,301$ м/сек; $t_f = 15,4^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,02$			
1	22,0	3820	6,5	266	6,62	3,1
3	23,3	3200	16,3	799	6,40	7,7
7	25,3	2570	30,6	1860	6,10	14,9
15	27,5	2100	53,6	4030	5,74	24,7
28	30,5	1690	80,2	7650	5,32	36,3
40	32,0	1530	104	11000	5,14	46,7
55	34,3	1350	126	15200	4,88	55,5
77	37,8	1140	149	21400	4,50	64,4
107	40,7	1010	183	29900	4,24	78,1
134	43,4	910	207	37700	4,02	87,3
166	45,7	840	236	47100	3,84	98,5
198	47,4	790	267	56400	3,70	110
Опыт 18			$U = 0,257$ м/сек; $t_f = 15,2^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,08$			
1	17,0	3120	5,3	226	7,66	2,6
3	17,4	2470	12,6	678	7,57	6,2
7	17,9	2010	24,0	1580	7,46	11,7
15	18,1	1880	47,9	3430	7,42	23,4
28	18,8	1490	71,0	6400	7,26	34,5
40	19,4	1294	88,1	9500	7,14	42,7
55	19,8	1170	109	13060	7,04	52,8
77	21,1	926	121	18280	6,82	58,1
107	21,8	820	149	25400	6,69	71,2
134	22,7	720	165	31820	6,53	77,9
166	23,4	660	187	39420	6,40	87,8
198	23,7	640	216	48750	6,35	101
Опыт 20			$U = 0,173$ м/сек; $t_f = 15,5^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,05$			
1	17,3	2780	4,5	153	7,60	2,34
3	17,9	2100	10,7	455	7,44	5,25
7	18,5	1710	20,3	1070	7,32	9,94
15	18,9	1540	39,4	2340	7,24	19,1
28	19,7	1250	59,4	4420	7,07	28,7
40	20,2	1130	77,2	6350	6,99	37,2
55	20,9	990	92,8	8880	6,85	44,5
77	22,2	800	105	12400	6,62	50,0
107	23,2	698	127	17300	6,44	60,0
134	24,1	627	143	22000	6,28	67,0
166	25,0	569	160	27500	6,13	74,8
198	25,3	540	182	33000	6,05	82,6

Продолжение таблицы 13

$x$ , мм	$t_{\text{шх}}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
Опыт 22			$U=0,182$ м/сек; $t_f=15,5^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,00$			
1	21,8	4000	6,8	162	6,70	3,25
3	24,8	2700	13,8	485	6,18	6,47
7	27,2	2140	25,4	1130	5,80	11,7
15	30,2	1700	43,4	2480	5,38	19,6
28	34,3	1330	63,3	4680	4,86	27,9
40	36,3	1210	82,0	6720	4,66	35,8
55	39,0	1070	99,9	9310	4,40	43,1
77	43,1	909	119	13100	4,06	50,2
107	47,1	794	144	18500	3,74	59,4
134	49,9	729	166	23300	3,54	67,8
166	53,0	668	189	29100	3,42	76,3
198	55,0	635	214	34900	3,32	85,8
Опыт 23			$U=0,133$ м/сек; $t_f=13,6^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,47$			
1	13,8	5680	9,7	112	8,43	4,9
3	14,1	2110	10,8	337	8,36	5,4
7	14,1	1820	21,8	786	8,35	10,8
15	14,3	1300	33,3	1740	8,29	16,5
28	14,6	988	47,4	3260	8,23	25,5
40	14,7	841	57,6	4690	8,20	28,5
55	14,9	739	69,6	6500	8,15	34,4
77	15,1	594	78,3	9230	8,08	38,7
107	15,4	510	93,5	13010	8,02	46,1
134	15,6	468	107,4	16520	7,99	52,8
166	15,5	478	135,9	20470	8,00	66,9
198	15,9	399	135,1	24750	7,90	66,3
211	15,9	399	166,1	26370	7,90	81,5
Опыт 24			$U=0,107$ м/сек; $t_f=15,9^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=7,90$			
1	18,0	3510	6,9	96	7,40	3,42
3	19,2	2230	13,2	288	7,16	6,42
7	20,2	1710	23,7	671	6,96	11,5
15	21,8	1250	36,9	1481	6,66	17,8
28	23,4	983	54,3	2820	6,40	25,9
40	24,3	878	69,3	4030	6,24	32,8
55	25,3	784	85,1	5540	6,06	40,0
77	27,3	647	98,3	7890	5,78	45,9
107	29,0	563	118,8	11100	5,54	54,7
134	30,2	515	136,2	14100	5,38	66,9
166	31,4	476	155,7	17500	5,22	70,5
198	32,3	450	176,0	21100	5,12	79,3
211	31,4	476	197,0	22500	5,22	89,1

Продолжение таблицы 13

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_w^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
Опыт 27			$U=0,071$ м/сек; $t_f=15,9^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=7,90$			
1	20,8	2210	3,8	64	6,86	1,82
3	21,5	1940	9,9	192	6,73	4,76
7	23,4	1450	19,2	463	6,40	9,13
15	26,0	1080	27,4	996	5,78	12,7
28	28,8	841	40,0	1880	5,57	18,4
40	30,7	730	49,6	2720	5,31	22,6
55	32,2	665	62,2	3780	5,13	28,0
77	35,6	549	71,8	5360	4,73	31,7
107	38,2	486	88,3	7570	4,48	38,6
134	39,9	451	102,6	9610	4,31	44,3
166	42,0	415	116,9	12100	4,16	50,1
Опыт 28			$U=0,059$ м/сек; $t_f=14,3^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,29$			
1	16,2	2710	4,6	51	7,85	2,25
3	17,3	1700	8,7	152	7,59	4,22
7	18,2	1270	15,2	367	7,37	7,28
15	19,7	926	23,7	800	7,08	11,2
28	21,3	715	34,2	1510	6,77	16,0
40	22,3	621	42,5	2170	6,60	19,8
55	23,2	561	52,7	3030	6,43	24,7
77	25,1	462	60,7	4310	6,12	27,8
107	26,7	400	71,2	6080	5,87	32,3
134	28,0	363	83,1	7730	5,68	37,9
166	29,4	330	93,9	9710	5,50	41,9
198	30,0	316	107	11800	5,41	47,6
Опыт 29			$U=0,031$ м/сек; $t_f=14,0^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,38$			
1	14,2	2680	4,6	27	8,32	2,26
3	14,4	1340	6,9	79	8,26	3,38
7	14,6	976	11,7	185	8,23	5,72
15	14,7	767	19,7	397	8,19	9,63
28	15,1	511	24,5	741	8,11	12,0
40	15,3	423	28,9	1060	8,06	14,1
55	15,4	383	36,1	1460	8,02	17,6
77	15,7	316	41,6	2040	7,96	20,3
107	16,1	259	47,4	2850	7,87	23,0
134	16,2	244	55,9	3540	7,83	27,1
166	16,5	214	60,7	4400	7,76	29,4
198	16,8	192	64,9	5240	7,69	31,4
211	16,6	206	74,5	5600	7,74	36,1

Продолжение таблицы 13

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>3</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} (Pr_f/Pr_w)^{0,25}}$
<b>Опыт 30</b> <span style="float: right;"><math>U=0,254</math> м/сек; <math>t_f=42,0</math>°C; <math>Pr_f=4,14</math></span>						
1	46,9	3100	4,90	400	3,76	3,0
3	47,7	2640	12,4	1800	3,70	7,4
7	47,5	2740	30,1	2840	3,70	18,3
15	48,2	2450	57,7	5900	3,66	33,6
28	49,9	1910	84,0	11400	3,54	49,1
40	51,4	1620	102	16400	3,44	60,8
55	52,8	1400	121	22600	3,36	71,1
77	54,3	1240	150	31800	3,26	87,8
107	56,2	1070	180	44400	3,16	104
134	57,4	987	207	55900	3,10	119
166	58,5	918	239	69500	3,04	137
198	59,6	861	268	83500	2,92	152
<b>Опыт 31</b> <span style="float: right;"><math>U=0,093</math> м/сек; <math>t_f=15,2</math>°C; <math>Pr_f=8,1</math></span>						
22	20,0	1040	1710	38,9	7,00	18,7
70	23,2	626	5730	74,5	6,42	35,2
160	26,7	436	14000	119	5,86	54,6
190	27,7	403	15600	130	5,72	59,6
220	30,0	341	18100	128	5,40	57,6
<b>Опыт 32</b> <span style="float: right;"><math>U=0,294</math> м/сек; <math>t_f=14,8</math>°C; <math>Pr_f=8,20</math></span>						
22	15,8	1590	59,6	5630	7,92	29,1
70	16,5	931	111	17900	7,76	54,0
160	17,0	702	192	40900	7,62	92,6
190	17,2	658	213	48600	7,60	103
280	17,5	585	279	71600	7,52	134
22	17,7	1660	62	5630	7,48	30,2
70	19,7	980	117	17900	7,06	55,9
160	21,8	686	187	40900	6,66	88,2
220	23,0	582	218	56300	6,43	102
280	23,4	558	266	71600	6,38	124
22	22,3	1870	70	5620	6,56	33,0
70	27,3	1110	133	17900	5,78	60,5
160	33,1	754	206	40900	5,00	90,5
190	33,9	725	235	48570	4,90	103
<b>Опыт 33</b> <span style="float: right;"><math>U=0,368</math> м/сек; <math>t_f=16,7</math>°C; <math>Pr_f=7,70</math></span>						
22	19,6	1650	61	8300	7,08	30,5
70	21,0	1110	132	23500	6,80	64,8
160	22,0	900	245	53700	6,62	119
190	22,2	860	278	63700	6,60	135

Таблица 14

Поток воздуха  $l_0=0$ 

$x$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> ·град	$N_{ufx}$	$Re_{fx}$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33}}$
<b>Опыт 34</b>					
$U=1,68$ м/сек; $t_f=29,2^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=0,70$					
1	41,5	38,9	1,46	108	1,64
3	42,6	35,9	4,05	325	4,55
7	45,3	29,9	7,85	757	8,82
15	48,8	24,7	13,9	1690	15,6
28	53,7	19,6	20,6	3180	23,1
40	58,3	16,6	24,9	4550	28,0
55	60,9	15,2	31,3	6300	35,2
77	67,2	12,7	36,7	9860	41,2
107	72,0	11,2	45,2	12500	50,8
134	75,0	10,3	51,7	15800	58,1
166	79,2	9,6	60,3	19800	67,8
198	80,3	9,4	70,0	24200	78,7
<b>Опыт 35</b>					
$U=9,3$ м/сек; $t_f=27,3^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=0,70$					
8	31,2	57,3	17,3	4730	19,4
22	32,8	41,1	34,1	13000	38,3
70	35,4	27,8	73,4	41400	82,5
100	36,3	25,1	94,7	59100	106
130	38,0	21,1	104	76800	116
160	38,9	19,4	117	94500	132
190	39,8	18,1	130	112000	146
220	40,6	16,9	140	130000	158
280	42,4	14,9	157	165000	177
310	42,5	14,8	173	183000	194
<b>Опыт 36</b>					
$U=15,8$ м/сек; $t_f=27,2^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=0,70$					
8	32,4	90,0	27,2	8050	30,6
22	34,4	64,8	53,8	22200	60,4
70	39,0	39,3	104	70000	117
100	41,1	33,3	126	101000	141
130	43,1	29,2	143	131000	161
160	44,5	26,7	161	161000	181
190	45,9	24,8	178	191000	200
220	47,1	23,3	193	221000	217
280	48,8	21,5	227	282000	255
<b>Опыт 37</b>					
$U=17,7$ м/сек; $t_f=27,1^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=0,7$					
8	36,9	107	32,4	9010	36,4
22	41,4	73,6	61,1	24300	68,6
70	51,9	42,6	113	78800	126
100	55,4	37,3	141	113000	158
130	60,8	31,3	154	146000	173
160	63,9	28,7	173	180000	195
190	65,5	27,5	197	214000	221



Таблица 15

Поток трансформаторного масла  $l_0=92$  мм

$x_1$ , мм	$t_{\text{вх}}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2}$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} \left[\frac{x_1}{x}\right]^{0,2}} K_2$
<b>Опыт 38</b> <span style="float: right;"><math>U=0,131</math> м/сек; <math>t_f=15,4</math>°C; <math>Pr_f=486</math></span>							
1	34,9	455	3,9	3,5	219	0,40	1,01
4	41,1	345	11,9	13,9	176	0,53	2,21
8	46,3	287	19,8	44,0	149	0,60	3,11
16	52,6	238	32,8	91,5	122	0,68	4,35
29	59,1	203	50,7	167	105	0,75	5,86
43	63,9	183	67,7	259	95	0,79	7,27
56	67,2	171	82,6	348	88	0,82	8,30
75	71,8	157	102	491	81	0,85	9,71
99	75,5	148	126	684	77	0,87	11,5
120	75,0	149	154	852	79	0,89	13,9
<b>Опыт 39</b> <span style="float: right;"><math>U=0,274</math> м/сек; <math>t_f=42,2</math>°C; <math>Pr_f=170</math></span>							
1	52,5	585	5,1	27	123	0,40	2,12
4	56,6	419	14,7	109	111	0,53	4,50
8	59,7	342	24,1	218	103	0,60	6,40
16	64,0	278	39,2	440	94	0,68	8,90
29	68,2	233	59,4	804	87	0,75	12,1
43	71,5	207	78,3	1210	82	0,79	14,9
56	73,6	193	95,2	1590	80	0,82	17,3
75	76,6	177	116	2150	78	0,85	20,2
99	79,1	164	143	2870	76	0,87	24,2
120	78,5	167	176	3550	77	0,89	29,2
<b>Опыт 40</b> <span style="float: right;"><math>U=0,209</math> м/сек; <math>t_f=42,3</math>°C; <math>Pr_f=170</math></span>							
1	54,1	514	4,5	20	119	0,40	1,84
4	58,5	374	12,8	83	106	0,53	3,86
8	62,3	303	21,3	167	97	0,60	5,62
16	66,7	248	32,7	336	89	0,68	7,36
29	71,6	207	52,8	612	82	0,75	10,6
43	75,3	183	69,5	929	78	0,79	13,3
56	77,6	171	84,6	1210	74	0,82	15,1
75	81,0	156	103	1660	75	0,85	18,1
99	83,8	145	127	2240	73	0,87	21,2
120	83,4	147	156	2770	75	0,89	25,1
<b>Опыт 42</b> <span style="float: right;"><math>U=0,280</math> м/сек; <math>t_f=60,2</math>°C; <math>Pr_f=102</math></span>							
1	68,8	605	5,4	47	86	0,40	2,80
4	71,9	445	15,9	186	82	0,53	6,05
8	74,7	360	25,8	373	79	0,60	8,65
16	77,7	298	42,6	748	77	0,68	12,5

Продолжение таблицы 15

$x_1$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx_1}$	$Re_{fx_1}$	$Pr_w$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,3}$	$\frac{Nu_{fx_1}}{Pr_f^{0,33} \left[\frac{x_1}{x}\right]^{0,2}} K_2$
29	81,4	254	65,8	1370	74	0,75	17,4
43	84,2	218	83,7	2050	74	0,79	20,9
56	85,9	203	102	2680	73	0,82	24,4
75	88,6	184	123	3630	72	0,85	28,4
99	90,6	171	152	4830	71	0,87	34,0
120	90,1	175	188	5950	71	0,89	41,2

Опыт 43

$U=0,277$  м/сек;  $t_f=60,9^\circ\text{C}$ ;  $Pr_f=100$

1	62,0	617	5,5	47	99	0,40	2,72
4	62,4	458	16,4	188	97	0,53	6,67
8	63,0	330	23,6	377	96	0,60	8,36
16	63,3	289	41,5	758	95	0,68	12,0
29	63,8	240	62,4	1380	95	0,75	17,6
43	64,4	203	78,0	2070	93	0,79	21,0
56	64,6	189	94,2	2710	92	0,82	22,6
75	65,1	169	113	3670	91	0,85	28,0
99	65,4	153	135	4900	91	0,87	32,2
120	65,4	159	170	5950	91	0,89	40,0

Опыт 44

$U=0,191$  м/сек;  $t_f=62,7^\circ\text{C}$ ;  $Pr_f=96$

1	67,2	491	4,4	34	88	0,40	2,31
4	68,7	370	13,2	138	86	0,53	5,24
8	70,1	300	21,4	277	84	0,60	7,5
16	71,7	254	35,1	559	82	0,68	10,7
29	73,5	204	47,5	1020	82	0,75	13,2
43	75,1	178	68,4	1530	80	0,79	17,8
56	76,0	166	83,5	2010	79	0,82	20,8
75	77,3	152	102	2720	78	0,85	24,5
99	78,4	140	125	3620	77	0,87	29,3
120	78,1	144	155	4460	77	0,89	35,4

Опыт 45

$U=0,098$  м/сек;  $t_f=60,9^\circ\text{C}$ ;  $Pr_f=100$

1	65,5	354	3,2	18,0	91	0,40	1,65
4	66,9	269	9,6	72,6	89	0,53	3,80
8	68,3	220	15,8	145	86	0,60	5,44
16	70,0	179	25,6	296	84	0,68	7,72
29	71,7	151	39,1	540	82	0,75	10,7
43	73,3	131	50,5	815	80	0,79	12,5
56	74,5	120	60,0	1070	79	0,82	14,8
75	75,7	110	73,8	1460	77	0,85	17,6
99	76,7	103	91	1970	73	0,87	20,6
120	76,6	104	111	2500	75	0,89	24,9

Таблица 16

Поток воды  $l_0=92$  мм

$x_1$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> град	$Nu_{fx_1}$	$Re_{fx_1}$	$Pr_w$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,8}$	$\frac{Nu_{fx_1}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,8}} K_2$
Опыт 46 <span style="float: right;"><math>U=0,302</math> м/сек; <math>t_f=13,4</math>°C; <math>Pr_f=8,54</math></span>							
1	16,4	4060	7,0	260	7,78	0,40	8,2
4	18,3	2530	17,3	1040	7,36	0,53	15,4
8	19,6	2000	27,4	2080	7,10	0,60	21,4
16	20,9	1630	44,7	4260	6,84	0,68	30,3
29	22,7	1320	65,5	7770	6,52	0,75	40,0
43	24,0	1160	85,4	11500	6,26	0,79	49,3
56	24,9	1070	102	15100	6,14	0,82	54,4
75	25,5	1020	131	20300	6,04	0,85	69,2
99	26,5	942	160	26800	5,92	0,87	81,2
Опыт 47 <span style="float: right;"><math>U=0,135</math> м/сек; <math>t_f=13,3</math>°C; <math>Pr_f=8,54</math></span>							
1	20,2	2840	4,9	118	6,98	0,40	5,57
4	23,8	1860	12,8	488	6,32	0,53	11,0
8	26,5	1450	20,3	978	5,90	0,60	15,1
16	29,8	1190	32,4	1959	5,42	0,68	20,7
29	33,8	953	47,3	3550	4,92	0,75	26,9
43	36,5	841	62,0	5310	4,62	0,79	33,2
56	38,6	771	74,1	6960	4,42	0,82	37,3
75	41,2	701	90,2	9360	4,20	0,85	43,2
99	43,6	644	109,4	12400	4,00	0,87	50,4
Опыт 49 <span style="float: right;"><math>U=0,182</math> м/сек; <math>t_f=42,0</math>°C; <math>Pr_f=4,1</math></span>							
1	43,8	2340	3,7	300	4,00	0,40	5,6
4	44,3	1740	10,9	1200	3,96	0,53	12,7
8	44,6	1480	18,5	2400	3,92	0,60	19,0
16	45,1	1230	30,0	4830	3,90	0,68	26,9
29	45,6	1040	47,5	8790	3,86	0,75	38,8
43	46,1	900	61,0	13100	3,82	0,79	47,6
56	46,4	840	73,6	17100	3,80	0,82	55,0
75	46,7	770	90,6	22900	3,76	0,85	65,2
99	46,8	760	118	30400	3,76	0,87	82,0
Опыт 51 <span style="float: right;"><math>U=0,059</math> м/сек; <math>t_f=42,0</math>°C; <math>Pr_f=4,14</math></span>							
1	45,7	1730	2,7	99	3,84	0,40	4,1
4	47,1	1240	7,8	401	3,74	0,53	9,0
8	48,6	954	12,0	795	3,62	0,60	12,1
16	50,4	765	19,2	1606	3,50	0,68	16,1
29	52,3	620	28,2	2930	3,42	0,75	22,4
43	53,3	565	38,1	4370	3,32	0,79	28,7
56	54,3	518	45,6	5710	3,26	0,82	32,6
75	55,6	468	55,1	7700	3,21	0,85	38,0
99	56,0	457	71,1	10250	3,18	0,87	47,0

Таблица 17

Поток воздуха  $l_0 = 92$  мм

$x_1$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx_1}$	$Re_{fx_1}$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2}$	$\frac{Nu_{fx_1}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2}} K_2$
Опыт 52 <span style="float: right;"><math>U = 1,72</math> м/сек; <math>t_f = 28,3^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 0,70</math></span>						
1	42,9	35,2	1,3	111	0,40	3,73
4	45,5	29,9	4,5	445	0,53	9,65
8	48,3	25,8	7,7	891	0,60	14,0
16	52,5	21,3	12,8	1780	0,68	21,3
29	57,8	17,4	19,0	3230	0,75	28,7
43	63,1	14,8	23,9	4790	0,79	34,6
56	66,0	13,6	28,8	6230	0,82	39,7
75	70,1	12,3	34,7	8340	0,85	46,4
99	73,0	11,5	42,9	11000	0,87	55,5
Опыт 53 <span style="float: right;"><math>U = 1,70</math> м/сек; <math>t_f = 28,0^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 0,70</math></span>						
1	31,0	38,5	1,4	110	0,40	4,02
4	31,6	32,6	4,9	441	0,53	10,4
8	32,7	24,9	7,5	881	0,60	14,3
16	33,4	21,6	13,0	1760	0,68	21,3
29	34,6	17,8	19,4	3200	0,75	29,1
43	35,6	15,4	24,9	4740	0,79	35,6
56	36,5	13,4	28,9	6170	0,82	39,5
75	37,4	12,4	35,1	8260	0,85	46,3
99	38,2	11,5	42,9	10900	0,87	55,0
Опыт 54 <span style="float: right;"><math>U = 1,25</math> м/сек; <math>t_f = 27,5^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 0,70</math></span>						
1	31,6	28,6	1,1	80	0,40	3,41
4	32,3	24,2	3,6	319	0,53	7,72
8	33,1	20,9	6,3	638	0,60	11,9
16	34,1	17,8	10,7	1280	0,68	17,5
29	35,5	14,7	16,0	2310	0,75	24,1
43	37,0	12,3	19,9	3430	0,79	28,4
56	38,0	11,2	23,6	4470	0,82	32,2
75	38,8	10,4	29,3	5980	0,85	38,8
99	39,4	9,8	36,6	7890	0,87	46,6
Опыт 55 <span style="float: right;"><math>U = 0,71</math> м/сек; <math>t_f = 26,2^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 0,70</math></span>						
1	30,1	23,8	0,9	46	0,40	2,51
4	30,8	20,5	3,0	184	0,53	6,34
8	31,5	17,8	5,4	269	0,60	9,89
16	32,5	14,8	9,0	736	0,68	14,7
29	34,0	12,0	13,2	1330	0,75	19,6
43	35,3	10,4	16,8	1980	0,79	24,0
56	36,1	9,5	20,2	2580	0,82	27,5
75	37,1	8,6	24,5	3460	0,85	32,2
99	37,8	8,1	30,3	4560	0,87	38,8

Таблица 18

Поток трансформаторного масла  $l_0 = 182$  мм

$x_1$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,3}$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,3}} K_s$
Опыт 56 <span style="float: right;"><math>U = 0,131</math> м/сек; <math>t_f = 15,3^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 487</math></span>							
1	40,3	479	4,1	6,7	187	0,35	1,20
4	48,7	358	12,3	26,0	141	0,46	2,54
8	55,4	299	20,6	54,2	114	0,53	3,52
16	63,3	249	34,3	113	96	0,61	4,92
29	66,4	235	58,6	207	90	0,67	7,50
Опыт 58 <span style="float: right;"><math>U = 0,069</math> м/сек; <math>t_f = 15,5^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 483</math></span>							
1	17,6	285	2,4	4,8	445	0,35	0,86
4	18,5	199	6,8	19,7	428	0,47	1,82
8	19,0	171	11,7	39,8	416	0,53	2,75
16	19,8	137	18,9	80,7	400	0,61	3,82
29	20,3	126	31,4	156	400	0,67	5,72
Опыт 59 <span style="float: right;"><math>U = 0,286</math> м/сек; <math>t_f = 43,0^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 166,0</math></span>							
1	45,8	588	5,2	47	150	0,35	2,59
4	47,0	441	15,5	175	148	0,47	5,85
8	48,0	335	23,6	300	142	0,53	7,75
16	49,3	268	37,7	580	136	0,60	10,7
29	49,8	246	62,9	995	135	0,67	16,3
Опыт 61 <span style="float: right;"><math>U = 0,095</math> м/сек; <math>t_f = 42,7^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 168,0</math></span>							
1	53,6	358	3,2	12,2	120	0,35	1,54
4	57,6	263	9,3	49,1	109	0,47	3,34
8	60,8	216	15,3	98,6	100	0,53	4,55
16	64,7	178	25,0	199	93	0,60	6,51
29	66,2	167	42,6	367	90	0,67	9,90
Опыт 62 <span style="float: right;"><math>U = 0,280</math> м/сек; <math>t_f = 64,6^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f = 93,0</math></span>							
1	67,7	550	4,9	54	88	0,35	3,02
4	68,8	404	14,5	219	86	0,47	6,69
8	69,6	335	24,1	440	84	0,53	9,65
16	70,7	275	39,5	883	83	0,61	13,8
29	71,4	248	64,7	1580	82	0,67	21,0

Таблица 19

Поток воды и воздуха  $l_0 = 182$  мм

$x_1$ , мм	$t_{wx}$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx_1}$	$Re_{fx_1}$	$Pr_w$	$\left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2}$	$\frac{Nu_{fx_1}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2}} K_2$
Опыт 67					$U = 0,199$ м/сек; $t_f = 13,7^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,44$		
1	19,1	2680	4,6	182	7,20	0,35	6,15
4	22,0	1750	11,9	733	6,62	0,47	11,8
8	23,9	1420	19,5	1470	6,30	0,53	16,7
16	25,8	1190	32,6	2940	6,00	0,61	24,2
29	26,9	950	55,0	5350	5,88	0,67	36,6
Опыт 70					$U = 0,092$ м/сек; $t_f = 13,20^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,59$		
1	27,1	2060	3,5	77	5,81	0,35	4,43
4	33,9	1390	9,5	307	4,92	0,47	8,7
8	38,3	1150	15,8	613	4,47	0,53	12,3
16	43,4	952	26,1	1230	4,02	0,61	17,4
29	46,1	875	43,6	2220	3,82	0,67	26,1
Опыт 72					$U = 0,176$ м/сек; $t_f = 32,1^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 5,14$		
1	33,5	2790	4,5	234	4,97	0,35	7,3
4	34,3	1810	11,7	930	4,88	0,47	14,3
8	34,8	1440	18,6	1860	4,82	0,53	20,0
16	35,4	1200	30,9	3730	4,76	0,61	29,1
29	35,6	1120	52,0	7120	4,74	0,67	44,0
Опыт 74					$U = 9,07$ м/сек; $t_f = 29,60^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 0,70$		
1	43,5	78,5	2,94	584	0,70	0,35	9,3
4	46,1	66,2	9,95	2340		0,47	23,9
8	49,3	55,6	16,6	4670		0,53	35,1
16	53,8	45,1	26,9	9340		0,61	49,9
29	58,1	38,4	41,7	16900		0,67	70,2
Опыт 76					$U = 5,40$ м/сек; $t_f = 27,0^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 0,70$		
1	50,1	59,3	2,2	356	0,70	0,35	7,1
4	57,9	44,2	6,7	1430		0,47	16,1
8	62,7	38,2	11,5	2850		0,53	24,3
16	69,1	32,5	19,6	5700		0,61	37,7
29	71,2	30,9	33,8	10400		0,67	57,4

#### 4. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче пластины в потоках трансформаторного масла, воды и воздуха

Таблица 20

Пластина  $l = 10,3$  мм

$t_f$ , °C	$t_w$ , °C	$\alpha$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$w$ , м/сек	$Nu_f$	$Pr_f$	$Re_f \cdot 10^{-3}$	$\frac{Nu_f}{Pr_f^{0,33} K_2}$
<b>Опыт 78</b> <span style="float: right;">Поток трансформаторного масла</span>							
19,6	45,4	2080	2,00	184	405	0,72	19,5
20,8	46,3	2060	2,00	181	389	0,77	19,6
24,5	40,1	1840	1,62	162	327	0,75	20,0
24,5	41,8	1560	1,28	139	327	0,60	17,1
59,8	78,4	2130	1,90	206	100	2,96	41,6
59,5	77,0	1960	1,64	189	101	2,52	37,9
59,7	76,5	1780	1,43	170	100	2,18	33,9
60,4	77,2	1600	1,06	154	99	1,67	31,2
59,6	77,0	1300	0,80	127	100	1,26	25,8
<b>Опыт 79</b> <span style="float: right;">Поток воды</span>							
30,3	44,6	10300	1,39	180	5,38	17,9	95,5
30,3	45,0	9060	1,09	159	5,38	14,0	84,0
30,3	45,3	7380	0,75	129	5,32	9,6	68,0
30,1	44,5	6650	0,60	115	5,40	7,4	61,0
31,3	45,5	5050	0,31	85,0	5,26	3,92	45,1
31,3	45,5	4680	0,27	80,0	5,22	3,53	42,8
31,4	45,1	3860	0,19	67,4	5,20	2,54	35,7
31,4	45,5	3850	0,17	64,9	5,22	2,26	34,6
31,3	45,2	3360	0,13	57,7	5,22	1,73	30,9
40,2	55,3	3510	0,29	85,5	4,30	4,61	48,8
40,1	55,9	4760	0,25	78,0	4,30	3,93	44,6
40,2	55,5	3410	0,14	51,1	4,30	2,13	29,2
60,7	76,3	3370	0,12	53,4	2,92	2,71	35,3
<b>Опыт 80</b> <span style="float: right;">Поток воздуха</span>							
31,5	82,5	123	9,93	47,1	0,70	6,39	53,1
31,8	82,8	115	8,66	44,1		5,54	49,7
32,3	83,0	106	7,25	39,9		4,58	45,0
31,4	59,5	88	5,30	34,1		3,34	38,4
31,7	82,6	87	4,98	33,8		3,13	38,1
27,4	58,9	54	1,86	21,1		1,24	23,8
27,3	58,9	52	1,65	20,2		1,09	22,1
26,7	58,9	47	1,27	18,0		0,83	20,2
26,5	44,6	41	1,06	16,1		0,70	18,1

Таблица 21

Пластина  $l=212$  мм

$t_f$ , °C	$t_n$ , °C	$\alpha$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$w$ , м/сек	$Nu_f$	$Pr_f$	$Re_f \cdot 10^{-3}$	$\frac{Nu_f}{Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 81				Поток трансформаторного масла			
14,5	40,0	143	0,149	226	502	0,69	21,9
14,8	29,2	130	0,148	204	498	0,70	22,1
14,9	52,8	127	0,121	202	494	0,57	18,0
14,3	46,9	116	0,084	180	508	0,38	16,5
15,0	48,8	103	0,077	161	494	0,36	14,9
40,6	54,3	177	0,279	283	180	4,07	45,0
41,5	68,2	186	0,262	298	175	3,91	44,8
40,4	55,4	130	0,158	209	181	2,26	32,4
41,6	45,7	143	0,190	229	174	2,83	39,6
41,8	72,2	142	0,150	228	172	2,28	34,2
41,5	57,4	107	0,088	172	175	1,31	27,2
58,9	72,9	186	0,286	304	105	7,39	60,2
57,9	84,9	166	0,197	270	107	4,95	52,2
Опыт 82				Поток воды			
15,4	37,8	1130	0,301	351	8,02	48,5	152
18,1	30,4	988	0,234	302	7,42	40,5	143
15,5	22,2	793	0,173	245	8,05	29,2	117
13,6	15,1	622	0,133	194	8,47	20,5	95,8
15,9	27,2	652	0,107	201	7,90	17,5	93,7
15,4	25,2	555	0,094	171	8,02	15,1	80,1
16,9	35,5	554	0,071	171	7,90	11,6	75,6
14,3	25,1	462	0,059	143	8,29	9,2	65,8
14,0	15,8	298	0,031	92	8,38	4,8	45,3
42,0	52,2	1490	0,254	425	4,14	72,7	252
41,3	44,0	945	0,210	270	4,19	59,5	167
42,0	53,2	979	0,179	280	4,14	51,1	165
42,0	46,2	561	0,096	160,4	4,14	27,8	97,9
Опыт 83				Поток воздуха			
29,2	66,0	13,0	1,68	89,3	0,70	19,7	100
28,9	37,4	12,8	1,34	87,4		15,6	98
28,6	66,5	11,5	1,26	79,0		14,8	88
29,2	66,0	13,0	1,68	89,3		19,7	100
27,0	75,5	10,3	0,92	71,0		11,0	80
28,8	33,5	11,2	0,93	76,6		11,5	86
27,9	48,2	10,0	0,73	68,9		8,8	77



Таблица 22

Пластина = 50,3

$t_f$ , °C	$t_w$ , °C	$\alpha$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$w$ , м/сек	$Nu_f$	$Pr_f$	$Re_f 10^{-3}$	$\frac{Nu_f}{Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 89				Поток трансформаторного масла			
39,5	53,8	375	0,376	186	174	1,51	30,2
39,9	53,0	340	0,320	171	173	1,30	27,5
39,7	52,7	394	0,281	173	174	1,55	27,8
39,7	53,5	322	0,261	160	174	1,05	25,7
39,9	53,3	348	0,216	153	173	0,90	24,8
40,4	52,1	278	0,174	137	171	0,72	22,6
39,9	53,1	311	0,161	137	173	0,67	22,3
39,9	70,4	423	0,280	185	173	1,16	27,7
39,9	70,9	384	0,220	166	173	0,91	24,8
59,5	74,9	459	0,405	205	101	3,04	41,3
59,9	75,0	468	0,375	210	100	2,80	42,5
59,5	74,9	443	0,353	200	101	2,65	40,2
59,5	75,8	380	0,257	168	100	1,92	33,8
58,8	89,0	493	0,370	216	102	2,71	40,6
59,6	91,9	421	0,307	190	101	2,30	37,6
Опыт 90				Поток воды			
20,9	42,7	2170	0,256	173	6,80	13,1	80,7
21,4	37,6	1800	0,205	153	4,54	10,4	73,5
21,5	38,0	1430	0,131	119	4,49	6,7	57,7
39,9	48,5	2470	0,318	183	4,30	23,8	112
39,8	47,9	2240	0,265	174	4,32	19,8	104
31,1	41,0	1930	0,249	154	5,26	15,6	83,0
39,7	47,6	1940	0,223	148	4,32	16,6	81,5
39,7	47,5	1250	0,188	101	4,32	7,9	59,5
40,1	52,6	1130	0,098	99	4,30	7,3	57,5
59,4	74,8	1936	0,185	137	3,00	18,9	89,5
59,4	73,2	1564	0,149	122	3,00	15,3	80,4
Опыт 91				Поток воздуха			
28,7	50,5	60,9	10,20	114	0,70	33,0	128
28,3	50,3	52,5	8,10	97		26,0	110
29,3	79,8	60,7	9,87	114		31,9	128
29,3	78,5	54,2	8,97	108		28,8	121
29,2	65,5	48,5	6,64	90		21,1	101
29,3	65,6	42,5	5,07	78		16,1	88
29,2	65,5	38,1	3,86	69		12,5	78
26,2	78,9	29,4	1,90	52		6,3	58
25,9	49,5	27,8	1,74	49,6		5,7	55,7
25,4	52,8	24,1	1,18	41,9		3,8	47,2
26,5	79,9	23,5	1,05	40,6		3,4	45,6
25,2	57,1	21,5	0,84	36,0		2,7	40,5

### 5. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче в начальном участке параллельных пластин

Таблица 23

Поток трансформаторного масла  $h=50$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} Pr_w^{0,33} K_2}$
Опыт 94 <span style="float: right;"><math>U=0,107</math> м/сек; <math>t_f=14,8^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=500</math></span>						
1	22,7	603	5,2	2,7	356	0,364
3	25,0	465	12,0	8,1	320	0,475
7	28,8	340	20,5	19,0	273	0,486
15	33,5	255	32,9	40,6	230	0,535
28	38,4	202	48,6	75,9	194	0,555
40	41,2	179	61,6	109	176	0,575
77	47,7	145	95,8	209	143	0,613
107	51,3	130	119	229	128	0,632
134	54,0	122	140	363	119	0,637
198	59,0	118	183	536	104	0,674
211	57,6	111	201	576	109	0,715

Опыт 95

 $U=0,247$  м/сек;  $t_f=41,1^\circ\text{C}$ ;  $Pr_f=177$ 

1	44,1	853	8,7	20	166	0,350
3	45,5	582	17,9	69	153	0,370
7	47,0	434	31,0	134	145	0,453
15	49,1	320	49,2	300	135	0,477
28	51,3	249	71,5	560	127	0,495
40	52,7	224	90,5	800	122	0,520
77	56,3	162	132	1539	112	0,535
107	58,3	149	164	2140	107	0,555
134	59,9	136	187	2680	103	0,560
198	62,9	122	238	3960	96	0,677
211	62,3	121	260	4220	98	0,615

Опыт 97

 $U=0,145$  м/сек;  $t_f=59,8^\circ\text{C}$ ;  $Pr_f=103,0$ 

1	63,3	777	7,0	21	96	0,317
3	64,8	544	14,6	64	93	0,382
7	66,4	409	26,6	150	90	0,435
15	68,7	304	40,8	320	86	0,466
28	71,2	238	59,5	597	83	0,500
40	72,7	211	75,5	853	81	0,526
55	73,8	194	95,6	1173	80	0,560
77	76,4	163	113	1642	76	0,556
107	78,4	146	140	2280	74	0,580
134	80,0	134	161	2860	72	0,588
198	83,3	116	205	4220	69	0,606
211	82,7	119	224	4500	70	0,646

Таблица 24

Поток трансформаторного масла  $h=20$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 98 <span style="float: right;"><math>U=0,157</math> м/сек; <math>t_f=15,0^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=498</math></span>						
1	18,6	657	5,6	4,0	424	0,340
3	19,5	525	13,7	12,1	408	0,465
7	20,9	392	23,6	28,1	386	0,531
15	22,7	301	38,8	60,3	355	0,580
28	24,6	243	60,4	113	328	0,650
40	25,8	214	73,6	161	311	0,665
55	26,7	199	94	221	299	0,725
77	28,5	173	115	309	278	0,710
107	30,0	156	143	430	260	0,745
134	31,0	146	168	538	251	0,770
166	32,1	136	194	666	240	0,790
198	33,1	129	220	795	233	0,815
211	32,6	132	241	848	236	0,870
Опыт 101 <span style="float: right;"><math>U=0,269</math> м/сек; <math>t_f=42,0^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=171</math></span>						
1	46,7	1042	9,2	24	147	0,324
3	48,4	759	20,1	67	139	0,418
7	50,7	559	34,5	157	129	0,462
15	53,5	426	52,5	336	120	0,475
28	56,6	335	82,7	628	111	0,535
40	58,5	296	104	898	106	0,555
55	60,0	272	132	1230	102	0,590
77	63,2	231	157	1730	96	0,587
107	65,8	206	198	2400	91	0,610
134	67,8	189	224	3010	88	0,621
166	70,0	175	255	3720	84	0,631
198	71,8	164	286	4440	82	0,640
211	71,4	167	309	4730	83	0,675
Опыт 105 <span style="float: right;"><math>U=0,183</math> м/сек; <math>t_f=61,1^\circ\text{C}</math>; <math>Pr_f=100,0</math></span>						
1	64,8	805	7,2	28	93,0	0,280
3	66,0	608	16,3	83	90,0	0,374
7	67,5	465	29,1	194	88,0	0,444
15	69,5	356	48,0	415	85,0	0,490
28	71,7	281	73,0	775	82,0	0,541
40	73,1	250	89,5	1110	81,0	0,553
55	74,1	230	113	1520	80,0	0,575
77	76,3	196	135	2130	78,0	0,580
107	78,3	174	167	2960	77,0	0,625
134	79,7	160	192	3710	76,0	0,635
166	81,3	148	220	4590	75,0	0,650
198	84,7	126	222	5480	74,0	0,610
211	82,3	140	265	5840	75,0	0,690

Таблица 25

Поток воды  $h=20$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 106			$U=0,360$ м/сек; $t_f=13,8^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,42$			
3	21,0	2810	14,5	917	6,80	0,220
7	20,6	2980	35,7	2140	6,90	0,362
15	21,8	2530	65,0	4580	6,68	0,425
28	24,3	1926	92,3	8560	6,24	0,457
40	25,1	1790	123	12200	6,10	0,509
55	26,6	1580	149	16800	5,90	0,518
77	29,3	1300	172	23500	5,50	0,493
107	31,7	1130	207	32700	5,18	0,497
134	33,3	1020	235	41000	5,00	0,500
166	35,3	938	267	50700	4,76	0,506
198	37,2	862	292	60500	4,58	0,505
211	36,2	899	325	64500	4,64	0,544
Опыт 108			$U=0,106$ м/сек; $t_f=13,7^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=8,47$			
1	17,5	4320	7,4	90	7,55	0,370
3	19,2	2800	14,4	269	7,17	0,424
7	21,0	2100	25,2	628	6,81	0,451
15	23,4	1590	40,8	1340	6,39	0,510
28	26,5	1210	58,1	2510	5,81	0,520
40	28,5	1050	71,8	3590	5,61	0,531
55	29,7	967	91,1	4930	5,44	0,570
77	32,5	825	109	6910	5,09	0,566
107	35,1	725	133	9590	4,79	0,575
134	37,3	657	151	12000	4,56	0,580
166	39,5	602	171	14900	4,36	0,585
198	41,1	566	192	17800	4,21	0,595
211	40,6	577	209	18900	4,26	0,630
Опыт 110			$U=0,214$ м/сек; $t_f=41,3^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=4,20$			
3	45,8	2730	12,9	1030	3,84	0,250
7	45,8	2730	30,0	2400	3,84	0,375
15	46,9	2200	51,8	5140	3,76	0,435
28	48,4	1750	76,9	9600	3,64	0,469
40	49,6	1490	93,9	13700	3,56	0,480
55	51,1	1260	109	18900	3,44	0,474
77	52,1	1140	138	26400	3,40	0,498
107	53,8	986	166	36800	3,30	0,505
134	55,3	884	186	45900	3,20	0,507
166	56,0	842	220	56900	3,16	0,513
198	57,1	781	243	72300	3,10	0,522

Таблица 26

Поток воздуха

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} \cdot Pr_f^{0,33}}$
Опыт 111			$h=20$ мм; $U=9,44$ м/сек; $t_f=31,2$ °C		
3	40,1	81,2	9,1	1770	0,240
7	41,4	70,9	18,5	4120	0,330
15	44,3	55,2	30,8	8850	0,371
28	47,6	43,9	45,8	16500	0,403
40	50,5	37,4	55,8	23600	0,412
55	52,8	33,4	68,6	32400	0,420
77	57,0	28,0	80,3	45400	0,425
107	60,6	24,6	98,0	63100	0,440
134	63,7	22,2	111	79000	0,450
166	66,5	20,5	127	97900	0,461
198	67,9	19,7	145	11700	0,480
211	66,3	20,6	162	124000	0,516
Опыт 112			$h=20$ мм; $U=1,83$ м/сек; $t_f=29,1$ °C		
7	34,6	32,8	8,6	820	0,338
15	35,5	28,2	15,9	1750	0,425
28	37,6	21,3	22,3	3280	0,436
40	39,2	17,9	26,9	4690	0,441
55	40,3	16,2	33,3	6450	0,465
77	42,1	13,8	40,0	9030	0,475
107	43,8	12,3	49,3	12500	0,495
134	44,9	11,4	57,4	15700	0,515
166	46,1	10,6	66,2	19500	0,535
198	47,0	10,1	75,0	23200	0,555
211	46,3	10,5	82,9	24700	0,590
Опыт 113			$h=10$ мм; $U=10,5$ м/сек; $t_f=29,5$ °C		
3	35,7	115	13,0	2030	0,323
7	37,3	90,7	23,8	4750	0,387
15	39,8	69,0	38,4	10200	0,427
28	42,2	56,0	58,6	19000	0,480
40	44,5	47,5	77,1	27100	0,485
55	45,9	43,4	89,5	37300	0,520
77	49,3	36,0	104	52200	0,510
107	52,3	21,3	125	72500	0,525
134	54,6	28,3	142	90900	0,526
166	56,9	25,8	160	113000	0,536
198	58,2	24,7	183	126000	0,560
211	57,0	25,9	205	143000	0,607

Таблица 27

Поток трансформаторного масла  $h=10$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 115			$U=0,095$ м/сек; $t_f=10,6^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=600$			
1	16,8	637	5,5	1,9	461	0,440
3	19,5	500	12,9	6,0	429	0,572
7	20,2	407	24,4	13,9	394	0,670
15	22,8	322	41,4	29,9	356	0,786
28	25,4	265	63,6	55,9	320	0,859
40	27,0	239	82,2	79,9	297	0,930
55	28,1	226	106	109	282	1,000
77	31,0	193	127	154	250	0,975
107	33,0	176	161	213	231	1,035
134	34,8	163	187	267	220	1,051
166	36,6	151	215	332	205	1,060
198	37,9	144	245	396	200	1,100
211	37,6	147	265	421	200	1,160
Опыт 116			$U=0,340$ м/сек; $t_f=40,1^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=182$			
1	45,3	1400	11,9	27	154	0,392
3	47,0	1020	26,8	78	145	0,503
7	49,3	762	46,9	186	135	0,562
15	52,5	564	74,4	398	122	0,595
28	56,1	437	108	744	112	0,615
40	58,2	384	135	1063	106	0,641
55	60,6	342	165	1461	106	0,665
77	63,4	300	203	2050	95	0,672
107	65,9	271	255	2840	91	0,710
134	68,0	250	295	3560	86	0,715
166	70,0	234	341	4400	84	0,737
198	71,7	221	385	5260	62	0,757
211	71,2	223	414	5600	82	0,800
Опыт 120			$U=0,231$ м/сек; $t_f=60,1^\circ\text{C}$ ; $Pr_f=102,0$			
1	66,2	1100	9,8	34	90	0,350
3	68,2	834	22,4	102	86	0,451
7	70,5	650	40,7	238	83	0,540
15	73,9	489	65,7	509	80	0,582
28	77,5	387	97	951	73	0,615
40	79,5	348	124	1360	71	0,650
55	81,2	320	157	1870	70	0,670
77	85,5	266	183	2610	72	0,690
107	88,3	240	228	3640	71	0,730
134	90,7	220	264	4550	70	0,753
166	93,0	206	306	5630	69	0,780
198	95,1	193	342	6730	67	0,810
211	94,6	195	369	7160	68	0,840

Таблица 28

Поток воды  $h = 10$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} \cdot Pr_f^{0,33} K_2}$
Опыт 121			$U = 0,200$ м/сек; $t_f = 13,4^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,52$			
1	18,1	4760	8,2	168	7,40	0,305
3	19,7	3540	18,1	504	7,04	0,384
7	21,3	2820	33,8	1175	6,76	0,457
15	24,1	2080	53,4	2520	6,21	0,483
28	27,0	1630	78,4	4700	5,82	0,510
40	28,3	1490	102	6720	5,64	0,548
55	30,2	1320	125	9240	5,36	0,564
77	33,4	1120	146	12930	4,96	0,550
107	36,1	970	179	17970	4,61	0,560
134	38,2	890	205	22500	4,48	0,567
166	40,8	810	230	27900	4,22	0,566
198	42,7	760	257	33300	4,08	0,575
211	41,7	780	283	35400	4,14	0,615
Опыт 122			$U = 0,067$ м/сек; $t_f = 13,7^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 8,44$			
1	16,4	3190	5,4	57	7,78	0,351
3	17,7	2140	11,0	171	7,49	0,400
7	19,0	1610	19,3	400	7,21	0,455
15	20,2	1310	33,6	857	6,97	0,540
28	22,5	965	66,1	1600	6,56	0,550
40	23,7	844	57,8	2280	6,34	0,555
55	24,5	782	73,6	3140	6,21	0,597
77	26,5	660	87,0	4400	5,90	0,590
107	28,1	586	107	6110	5,66	0,610
134	29,6	533	122	7660	5,46	0,615
166	31,1	486	138	9480	5,26	0,621
198	32,3	454	155	11310	5,10	0,611
211	31,8	468	169	12050	5,17	0,670
Опыт 123			$U = 0,304$ м/сек; $t_f = 30,1^\circ\text{C}$ ; $Pr_f = 5,40$			
3	35,8	3680	18	1140	4,70	0,290
7	36,2	3440	39	2650	4,66	0,415
15	38,0	2680	65	5680	4,50	0,470
28	40,4	2050	93	10600	4,28	0,485
40	42,3	1730	112	15200	4,10	0,485
55	43,0	1630	145	20800	4,04	0,535
77	45,6	1360	170	29200	3,84	0,520
107	47,6	1210	209	40500	3,70	0,535
134	49,6	1080	235	50800	3,56	0,540
166	52,0	965	260	62900	3,40	0,530
198	54,4	870	279	75000	3,26	0,510

Таблица 29

Поток трансформаторного масла  $h=4$  мм

$x$ , мм	$t_w$ , °C	$\alpha_x$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Re_{fx}$	$Pr_w$	$\frac{Nu_{fx}}{Re_{fx}^{0,5} Pr_f^{0,33}} K_2$
Опыт 126			$U=0,132$ м/сек; $t_f=16,0$ °C; $Pr_f=440$			
1	28,1	927	8,0	3,5	283	0,500
3	31,4	726	18,8	10,6	247	0,650
7	36,0	561	33,8	24,8	210	0,740
15	41,0	448	57,8	53,2	177	0,835
28	46,6	367	88,4	99,4	148	0,890
40	49,7	333	115	140	133	0,980
55	52,1	310	147	195	124	0,995
77	57,4	271	180	273	109	1,010
107	61,4	247	228	379	99	1,055
134	64,9	229	264	475	92	1,095
166	69,3	210	301	589	85	1,085
198	72,5	198	338	703	81	1,100
211	71,5	202	367	749	82	1,195
Опыт 128			$U=0,380$ м/сек; $t_f=42,4$ °C; $Pr_f=160$			
3	47,1	1120	29,9	97	142	0,535
7	48,8	831	51,3	225	134	0,590
15	50,3	673	89	483	126	0,685
28	53,0	500	123	902	118	0,690
40	54,4	444	158	1290	115	0,728
55	56,0	390	188	1770	112	0,740
77	58,0	341	231	2480	107	0,760
107	59,4	312	294	3450	104	0,810
134	60,7	291	342	4320	101	0,839
166	62,3	266	389	5350	97	0,845
198	63,5	251	438	6380	95	0,870
211	63,1	257	477	6800	96	0,916
Опыт 130			$U=0,241$ м/сек; $t_f=62,3$ °C; $Pr_f=98,0$			
3	65,5	977	26	113	90	0,520
7	66,7	711	45	263	88	0,601
15	68,3	521	70	566	85	0,616
28	69,7	423	106	1050	83	0,680
40	70,6	377	135	1510	82	0,720
55	71,9	326	160	2070	81	0,732
77	73,3	285	196	2900	80	0,750
107	74,7	252	242	4030	79	0,778
134	75,6	235	282	5050	77	0,811
166	76,8	215	320	6260	76	0,827
198	77,0	203	360	7470	74	0,845
211	77,4	207	391	7960	75	1,000



### 6. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче в начальном участке параллельных пластин

Таблица 30

$t_f$ , °C	$t_w$ , °C	$\alpha$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$U$ , м/сек	$Nu_f$	$Pr_f$	$Re_f$	$\frac{Nu_f}{Pr_f^{0,33} \left[ \frac{l}{h \cdot Re_f h} \right]^{0,1}} K_2$
						$h = 50$ мм; $l = 182$ мм	
Опыт 132							
14,2	30,3	146	0,144	227	510	639	35,0
41,1	56,2	226	0,247	353	177	3640	90,0
59,7	85,4	203	0,221	330	103	5820	118
59,8	77,0	157	0,145	257	103	3890	90,5
						$h = 20$ мм; $l = 182$ мм	
Опыт 133							
15,00	28,2	177	0,157	277	494	726	37,6
15,20	29,6	162	0,125	252	489	587	33,4
42,0	63,1	233	0,269	373	171	3770	84,6
42,3	82,2	202	0,160	324	169	2570	67,5
42,4	69,4	172	0,103	276	169	1560	56
61,2	74,7	223	0,257	363	100	7080	115
61,1	76,3	197	0,183	320	100	5040	97
13,9	29,4	1320	0,380	403	8,42	55600	333
13,7	18,8	688	0,111	214	8,44	17100	173
29,9	34,3	1024	0,251	301	5,43	56800	320
31,2	57,1	28,9	9,44	214	0,70	106000	440
29,1	41,8	14,6	1,83	111	0,70	21400	193
31,5	67,7	19,1	4,13	146	0,70	46100	276
						$h = 10$ мм; $l = 212$ мм	
Опыт 134							
18,3	34,8	21,6	0,144	390	433	930	47
10,6	31,6	188	0,095	340	600	423	32
40,1	64,0	294	0,340	545	182	5630	104
40,4	52,0	267	0,286	496	181	4770	100
41,0	83,0	301	0,285	529	177	4870	103
40,7	64,9	188	0,097	349	178	1650	59
59,0	69,4	252	0,272	476	105	8240	128
60,1	86,5	256	0,231	485	102	7200	125
13,4	33,5	1110	0,200	345	8,52	30600	232
13,7	26,5	595	0,067	856	8,44	10400	132
30,1	45,7	1360	0,304	401	5,40	68900	340
30,3	33,0	1110	0,213	327	5,38	48400	300
29,5	49,2	36,3	10,5	200	0,70	122000	410
29,6	40,5	15,7	1,49	96	0,70	17300	145
						$h = 4$ мм; $l = 182$ мм	
Опыт 135							
16,3	25,2	263	0,189	413	469	942	44
16,0	57,0	274	0,132	429	440	651	36
42,4	57,8	346	0,380	554	160	5870	98
62,3	73,8	275	0,241	446	97	6920	115

### 7. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче плоского канала при установившемся течении жидкости

Таблица 31

Поток трансформаторного масла  $h = 10,2$  мм

$\frac{x}{h}$	$t_{wx},$ °C	$\alpha_x,$ вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Pr_w$	$Re_{fx}$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{h}\right)^{0,33}} K_2$
Опыт 140 <span style="float: right;"><math>U = 0,573</math> м/сек; <math>Re_{fh} = 300</math>; <math>t_f = 25,4</math>°C; <math>Pr_f = 271</math></span>						
4,90	34,8	414	167	183	1470	13,7
9,80	37,7	307	248	165	2940	15,8
18,6	38,6	260	399	160	5580	20,4
24,5	42,2	228	460	143	7350	20,8
39,2	43,3	200	645	138	11800	24,4
49,0	45,6	186	750	129	14700	26,2
58,8	47,0	173	837	123	17600	27,2
73,6	48,9	159	962	117	22100	28,7
86,3	49,8	153	1090	113	25900	30,6
93,2	54,1	130	996	100	27900	26,6

Опыт 142

 $U = 1,73$  м/сек;  $Re_{fh} = 909$ ;  $t_f = 25,5$ °C;  $Pr_f = 270$ 

4,90	36,1	545	220	173	4460	17,90
9,80	39,3	417	336	156	8920	21,2
18,6	41,7	356	545	145	16900	27,3
24,5	43,4	322	649	138	22300	29,3
39,2	44,7	300	968	132	35700	37,0
49,0	46,8	265	1068	124	44600	37,2
58,8	49,1	242	1171	115	53500	37,6
73,6	50,8	225	1360	110	66900	40,0
86,3	51,9	215	1525	106	78500	42,9
93,2	51,7	216	1655	107	84700	44,8

Опыт 144

 $U = 3,28$  м/сек;  $Re_{fh} = 1660$ ;  $t_f = 24,6$ °C;  $Pr_f = 280$ 

1,96	31,5	880	150	209	3280	17,0
4,90	34,6	615	247	185	8100	20,0
9,80	37,2	476	383	168	16200	24,1
18,6	32,1	415	635	157	30900	31,7
39,2	42,8	330	1064	140	64900	40,4
49,0	44,7	299	1205	132	81200	41,7
58,8	45,0	294	1421	131	97400	46,1
73,6	46,8	268	1620	124	121800	48,4
86,3	47,4	262	1857	122	142900	52,0
93,2	46,8	268	2050	124	154200	56,4

Таблица 32

Поток трансформаторного масла  $h=5,4$  мм

$\frac{x}{h}$	$t_{wx},$ °C	$\alpha_x,$ вт/м <sup>2</sup> · град	$Nu_{fx}$	$Pr_w$	$Re_{fx}$	$\frac{Nu_{fx}}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{x}{h}\right)^{0,33}} K_2$
Опыт 150 <span style="float: right;"><math>U=1,00</math> м/сек; <math>Re_{fh}=249</math>; <math>t_f=22,9</math>°C; <math>Pr_f=300</math></span>						
35,2	45,7	377	576	128	8740	21,2
46,3	49,0	328	660	116	11500	21,7
74,2	50,7	307	990	110	18400	25,4
92,6	52,6	287	1160	104	23000	29,6
111,0	55,8	257	1240	95,1	27600	29,1
139,0	57,6	243	1470	90,7	34500	31,5
163,0	60,0	225	1590	85,4	40500	31,8
176,0	58,5	234	1790	88,6	43700	35,3
180,0	56,9	246	1920	92,5	44600	38,0
Опыт 152 <span style="float: right;"><math>U=1,65</math> м/сек; <math>Re_{fh}=514</math>; <math>t_f=24,1</math>°C; <math>Pr_f=285</math></span>						
9,25	38,0	625	251	166	4760	15,9
35,2	43,7	440	647	136	18080	26,0
46,3	46,6	381	767	125	23800	26,3
92,6	50,3	326	1313	112	47600	35,0
111,0	51,9	305	1474	106	57100	36,5
139,0	53,6	286	1728	101	71400	39,3
163,0	54,8	275	1950	97,8	83700	41,6
176,0	53,8	283	2170	101	90400	45,5
180,0	52,3	300	2340	105	92300	49,3
Опыт 154 <span style="float: right;"><math>U=3,84</math> м/сек; <math>Re_{fh}=918</math>; <math>t_f=22,1</math>°C; <math>Pr_f=310</math></span>						
35,2	31,9	489	747	208	32300	30,4
46,3	33,3	424	852	198	42500	31,3
74,2	33,8	407	1310	194	68000	40,8
92,6	35,1	364	1460	185	85000	41,8
111,0	36,0	339	1640	178	102000	43,8
139,0	36,8	319	1920	173	128000	47,2
163,0	37,3	305	2160	170	150000	50,2
176,0	36,1	332	2540	178	162000	57,9
180,0	35,8	341	2680	180	165000	60,9

8. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче плоского канала при установившемся течении жидкости

Таблица 33

Поток трансформаторного масла

$t_f$ , °C	$t_w$ , °C	$\alpha$ , вт/м <sup>2</sup> · град	$U$ , м/сек	$Nu_f$	$Re_f \cdot 10^{-3}$	$Pr_f$	$\frac{Nu_f}{Pr_f^{0,33} \left(\frac{l}{h}\right)^{0,33}} K_2$
Опыт 156							$h = 10,2$ мм, $l/h = 46$
23,0	30,5	234	0,60	880	13,0	300	34,2
25,4	39,8	263	0,57	988	13,7	271	36,8
25,8	54,9	272	0,64	1023	15,6	266	34,8
23,1	56,9	332	1,03	1240	22,2	299	39,1
26,6	41,3	307	0,99	1155	25,1	258	44,1
23,1	40,0	360	1,66	1350	35,9	299	48,2
23,5	37,0	319	1,73	1195	38,1	294	44,2
24,6	43,6	358	1,76	1340	40,6	281	48,3
26,5	55,4	377	1,67	1415	41,9	260	48,5
24,2	28,6	435	3,29	1635	74,7	285	66,3
25,6	57,0	451	3,27	1695	78,8	270	56,2
Опыт 157							$h = 5,4$ мм, $l/h = 86$
22,9	48,5	367	1,00	1380	21,4	300	37,0
43,2	61,3	405	1,31	1550	63,7	138	59,8
22,1	32,8	447	3,84	1700	79,2	310	51,0
23,1	50,0	523	4,17	2020	90,0	297	56,5
Опыт 158							$h = 10,2$ мм, $l/h = 95$
23,0	32,4	195	0,60	1525	27,0	300	45,5
25,4	44,4	198	0,57	1550	28,5	271	44,0
25,8	62,8	212	0,64	1660	32,5	266	41,9
23,1	65,3	263	1,03	2050	46,3	299	48,0
26,6	45,8	232	0,99	1815	52,1	258	52,5
23,1	44,4	279	1,66	2180	74,6	299	59,3
23,5	40,5	251	1,73	1965	79,3	294	55,4
24,6	48,5	260	1,76	2200	84,5	281	59,8
26,5	63,1	297	1,67	2330	87,1	260	59,6
24,2	29,8	337	3,29	2640	155	285	82,8
25,6	62,9	377	3,27	2950	164	270	73,7
							$h = 5,4$ мм, $l/h = 180$
22,9	52,8	285	1,00	2300	44,7	300	46,8
43,2	65,0	336	1,31	2680	133,0	138	79,0
22,1	34,6	382	3,84	2990	165,0	310	70,0
23,1	54,4	445	4,17	3610	188,0	297	74,1

### 9. Экспериментальные данные по гидравлическому сопротивлению плоского канала

Таблица 34

Начальный участок

$t_f$ , °C	$\Delta p$ , н/м <sup>2</sup>	$U$ , м/сек	$Re_d$	$l/dRe_d$	$2Eu$	$2Eu \frac{d}{l}$
Опыт 161			$h=20$ мм, поток трансформаторного масла			
14,7	40	0,155	157	0,034	3,72	0,706
14,7	31	0,131	132	0,040	4,00	0,758
42,3	128	0,615	2060	0,002	0,77	0,146
41,4	124	0,560	1800	0,003	0,90	0,171
41,2	75	0,396	1200	0,004	1,09	0,207
41,7	53	0,328	1060	0,005	1,10	0,209
Опыт 162			$h=10$ мм, поток трансформаторного масла			
11,1	177	0,172	75	0,141	13,3	1,260
10,6	185	0,126	53	0,199	16,0	1,520
17,5	132	0,174	103	0,103	9,76	0,925
40,8	88	0,265	424	0,025	2,85	0,270
40,8	44	0,149	238	0,044	4,21	0,399
40,8	18	0,068	109	0,097	8,67	0,822
60,3	87	0,325	956	0,011	1,92	0,182
59,0	49	0,229	654	0,016	2,12	0,201
Опыт 163			$h=10$ мм, поток воды			
12,4	50	0,127	5740	0,0028	0,71	0,0672
12,4	30	0,254	4160	0,0025	0,81	0,0768
12,4	20	0,188	3050	0,0035	0,98	0,0929
12,5	10	0,119	1940	0,0055	1,24	0,1180
Опыт 164			$h=10$ мм, поток воздуха			
29,5	31	10,5	11300	0,0009	0,46	0,0436
29,5	18	7,81	10000	0,0010	0,48	0,0455
30,2	9	4,75	6000	0,0178	0,64	0,0606
Опыт 165			$h=4$ мм, поток трансформаторного масла			
41,3	540	0,380	248	0,107	8,49	0,322
41,5	372	0,256	166,5	0,159	13,10	0,497
41,7	188	0,137	89,8	0,295	22,1	0,838
60,8	360	0,394	477	0,055	5,31	0,201
61,1	107	0,121	146,7	0,181	16,7	0,633
Опыт 166			$h=4$ мм, поток воздуха			
31,5	88	12,2	6200	0,0043	10,20	0,387
32,4	56	8,65	4300	0,0062	1,25	0,0474
32,7	30	5,69	2800	0,0212	2,80	0,106
20 5	10	2,39	1250	0,0212	2,80	0,106

Таблица 35

Установившееся течение

$t_f$ , °C	$t_w$ , °C	$\Delta p$ , н/м <sup>2</sup>	$U$ , м/сек	$Re_{fd}$	$2Eu \frac{d}{l}$	$\left(\frac{Pr_w}{Pr_f}\right)^{0,33}$	$\frac{2Eu \frac{d}{l}}{(Pr_w/Pr_f)^{0,33}}$
Опыт 170				$h=10,2$ мм, поток трансформаторного масла			
23,0	32,3	1010	0,65	570	0,132	0,87	0,151
21,7	24,7	1810	1,02	840	0,098	0,96	0,102
20,8	25,9	2670	1,52	1210	0,065	0,90	0,071
24,5	29,5	2830	1,78	1630	0,049	0,93	0,052
24,2	29,8	5080	3,29	2970	0,026	0,92	0,028
47,4	51,9	1050	1,66	3620	0,021	0,95	0,022
47,4	50,4	2910	3,22	6580	0,016	0,97	0,016
39,6	46,3	55400	10,30	17800	0,030	0,93	0,032
45,1	50,7	58200	11,50	23800	0,025	0,93	0,027
25,4	45,4	720	0,57	540	0,121	0,79	0,153
26,6	45,8	1230	0,99	1000	0,069	0,79	0,087
41,8	61,7	390	0,58	1060	0,064	0,83	0,078
20,5	37,5	2640	1,66	1260	0,053	0,80	0,066
Опыт 171				$h=5,4$ мм, поток трансформаторного масла			
22,2	32,5	5770	1,06	475	0,157	0,87	0,180
43,2	65,0	2730	1,31	1400	0,049	0,82	0,060
24,1	50,3	7800	1,97	974	0,062	0,74	0,083
22,1	34,6	18000	3,84	1740	0,037	0,64	0,044
23,1	52,8	18800	4,17	1970	0,033	0,69	0,047
25,5	45,5	2230	1,73	1650	0,040	0,78	0,520
44,4	62,8	630	1,05	2090	0,032	0,84	0,038
24,6	42,9	4320	3,28	3010	0,022	0,79	0,028
47,8	66,5	880	1,61	3680	0,018	0,85	0,021
45,8	64,4	2580	3,21	6640	0,014	0,64	0,017
44,2	57,8	6830	4,35	8800	0,021	0,88	0,024
39,5	58,7	21200	7,03	12100	0,025	0,83	0,030
41,0	57,0	30900	7,96	14500	0,028	0,85	0,033
25,8	62,9	680	0,64	620	0,091	0,67	0,136
23,1	65,3	1130	1,03	910	0,060	0,63	0,096
42,9	78,5	340	0,61	1150	0,052	0,74	0,070
26,5	63,1	1760	1,67	1670	0,035	0,67	0,052
47,4	86,3	550	1,16	2530	0,023	0,74	0,031
40,3	76,6	1070	1,65	2960	0,022	0,73	0,030
25,6	62,9	3490	3,27	3140	0,018	0,66	0,027
42,0	79,3	1890	3,19	5850	0,010	0,73	0,014
Опыт 172				$h=10,2$ мм, поток воды			
18,7	28,1	540	0,40	7350	0,017	0,92	0,019
15,8	19,5	600	0,98	16800	0,031	0,97	0,032
15,2	16,6	1480	1,78	29500	0,024	0,98	0,025



# Литература

1. Pohlhausen E., Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung, ZAMM, 1, 1921.
2. Karman Th., Laminare und turbulente Reibung, ZAMM, 1, 1921.
3. Pohlhausen K., Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht, ZAMM, 1, 1921.
4. Кружилин Г. Н., Исследование теплового пограничного слоя, ЖТФ, 6, вып. 3, 1936.
5. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М., Теория тепло- и массообмена, ГЭИ, М.—Л., 1961.
6. Кутателадзе С. С., Основы теории теплообмена, Машгиз, М.—Л., 1962.
7. Новиков И. И., Воскресенский К. Д., Основы ядерной энергетики Прикладная термодинамика и теплопередача, Госатомиздат, М., 1961.
8. Тонкошуров Б. А., Асатурян А. Ш., К вопросу о применении интегрального соотношения Л. С. Лейбензона в теплообмене, Труды НИИ Транснефть, Транспорт и хранение нефти, вып. 1, 1961.
9. Ojha S. K., On approximate calculation of laminar boundary layers using polynomials, ZAMM, 45, Heft 5, 1965.
10. Кочин Н. Э., Лойцянский П. Г., Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя, Доклады АН СССР, 34, № 9, 1942.
11. Скопец М. Б., Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе при наличии теплообмена, ЖТФ, 23, вып. I, 1953.
12. Андреевский А. А., Федорович Е. Д., К вопросу о теплообмене пластины и лобовой части цилиндра, обтекаемых ламинарным пограничным слоем несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Прандтля, ИФЖ, № 1, 1962.
13. Fischer F. D., Knudsen J. G., Heat transfer during laminar flow past flat plates, an extension of Pohlhausens solution to low high Prandtl-Number fluids, Chem. Engng. Progr. Sympos., 55, No 29, 1959.
14. Hara T., Heat transfer from flat plate in longitudinal flow of water, Trans. Japan. Soc. Engrs., 20, No 92, 1954.
15. Амбразявичюс А. Б., Жукаускас А. А., К вопросу о влиянии направления теплового потока на теплоотдачу пластины в потоке жидкости, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(16), 1958.
16. Михеев М. А., Теплоотдача при турбулентном движении жидкости в трубах, Изв. АН СССР ОТН, № 10, 1952.
17. Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
18. Асатурян А. Ш., Тонкошуров Б. А., Черников В. И., Особенности теплообмена и гидродинамики в потоке с переменной вязкостью, Труды НИИ Транснефть, Транспорт и хранение нефти, вып. 1, 1961.
19. Hanna O. T., Myers J. O., Laminar boundary layer flow and heat transfer past a flat plate for a liquid of variable viscosity, AICH Journal, 7, No 3, 1961.
20. Ибрагимов И. И., Кашкаров В. П., О ламинарном пограничном слое жидкости с переменной вязкостью, Труды сектора математики и механики АН Казахской ССР, 2, 1963.
21. Schuh H., Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an der ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und für Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen, ZAMM, 25—27, Nr 2, 1947.
22. Гребер Г., Эрк С., Григуль У., Основы учения о теплообмене, Изд. „Иностранная литература“, М., 1968.
23. Эккерт Э. Р., Введение в теорию тепло- и массообмена, ГЭИ, М., 1957.
24. Михеев М. А., Основы теплопередачи, ГЭИ, М.—Л., 1956.
25. Levy S., Heat transfer to constant property laminar boundary layer flow with power function freestream velocity and wall-temperature variation, J. Aeronaut. Sci., 29, No 5, 1952.



26. Tribus M., Klein J., Forced convection through a laminar boundary layer over an arbitrary surface with an arbitrary temperature variation, *J. Aeronaut. Sci.*, **22**, No 62–64, 1955.
27. Scesa S., Levy S., Heat transfer to constant property laminar boundary layer wedge flows with stepwise and arbitrary wall-temperature variation, *Trans. ASME*, No 2, 1954.
28. Подольская Э. Л., О расчете теплоотдачи балансомера, *Научные сообщения Института геологии и географии АН Литовской ССР*, **13**, 1962.
29. Fage A., Falkner V., On the relation between heat transfer an surface friction for laminar flow, *Aero. Res. Comm., Rep. and Memor.*, No 1408, 1931.
30. Амброк Г. С., Влияние переменной температуры поверхности на теплообмен при ламинарном течении в пограничном слое, *ЖТФ*, **27**, вып. 4, 1957.
31. Imai I., On the heat transfer to constant property laminar boundary layer with power function free-stream velocity and wall-temperature distributions, *Quart. Appl. Math.*, **16**, No 1, 1958.
32. Rubesin M., An analytical investigation of the heat transfer between a fluid and a flat plate parallel to the direction of flow having a stepwise discontinuous surface temperature, M. S. Thesis, University of California, Berkeley, 1945.
33. Eckert E. R., Hartnett J., Birkebak K., Simplified equation for calculating local and total heat flux to nonisothermal surfaces, *J. Aeronaut.*, **24**, No 6, 1957.
34. Lighthill M. J., Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer, *Proc. Roy. Soc., ser. A*, **202**, 1950.
35. Chapman D. R., Rubesin M. W., Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature, *J. Aeronaut. Sci.*, **16**, No 9, 1949.
36. Лабунцов Д. А., Приближенное исследование интенсивности теплообмена неизотермической плоской поверхности при ламинарном пограничном слое, доклад на Симпозиуме по конвективному теплообмену в потоке несжимаемой жидкости, *Каунас*, 1962; *ИФЖ*, **3**, № 3, 1965.
37. Edwards A., Furber B., The influence of free stream turbulence on heat transfer by convection from an isolated region of a plane surface in parallel air flow, *Proc. Inst. Mech. Enging.*, **170**, No 28, 1956.
38. Elias F., Der Wärmeübergang einer geheizten Platte an strömende Luft, *ZAMM*, **9**, Nr. 6, 1920; **10**, Nr. 1, 1939.
39. Parmalee G. V., Huebscher R. G., Heat transfer by forced convection along a smooth flat surface, *Heating, Piping, Air Conditioning*, **19**, 1947.
40. Kapadnis D. G., The effect of fluid motion on heat transmission, *Indian Journal of Physics*, **29**, No 6, 1955.
41. Михеев М. А., Теплоотдача и гидравлическое сопротивление пластины, Сб. „Конвективный и лучистый теплообмен“, Изд-во АН СССР, М., 1960.
42. Sugawara S., Sato T., Heat transfer on the surface of a flat plate in the forced flow, *Memor. Fac. Engng. Kyoto Univ.*, **14**, 1952.
43. Seban R. A., Doughty D. L., Heat transfer to turbulent boundary layers with variable free-stream velocity, *Trans. ASME*, **78**, 1956.
44. Ede A. J., Saunders O. A., Heat transfer from a flat surface to a parallel stream of water, *Proc. Inst. Mech. Engng.*, **172**, No 23, 1958.
45. Jakob M., Dow W., Heat transfer from a cylindrical surface to air in parallel flow with and without unheated starting sections, *Trans. ASME*, **68**, No 2, 1946.
46. Tessin W., Jakob M., Influence of unheated starting sections on the heat transfer from cylinder to gas streams parallel to the axis, *Trans. ASME*, **75**, No 5, 1953.
47. Eichhorn R., Eckert E. R., Anderson A. D., An experimental study of effects of nonuniform wall temperature on heat transfer in laminar and turbulent axisymmetric flow along a cylinder, *Trans. ASME, J. Heat Transfer, ser. C*, **82**, No 4, 1960.
48. Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *ZAMM*, **1**, **56**, 1908.

49. Howart L., On the solution of the laminar boundary layer equations, Proc. Roy. Soc., London, A. 164, 1938.
50. Van der Hegge Zijnen B., Measurement of the velocity distributions in the boundary layer along a plane surface, Delf., 1924.
51. Nikuradze J., Laminare Reibungsschichten an der längsanströmten Platte, Zentrale für wiss. Berichtwesen, Berlin, 1942.
52. Falkner V. M., Skan S., Some approximate solution of the boundary layer equations, Phil. Mag. 12, 1931; ARC Report, 1314, 1930.
53. Hartree D. R., On an equation occurring in Falkner and Skans approximate treatment of the equation of the boundary layer, Proc. Camb. Phil. Soc., 33, 1937.
54. Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, ФМ, М., 1962.
55. Швец М. Е., О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя, ПММ, 13, вып. 3, 1949.
56. Жюгжда И. И., Жукаускас А. А., Исследование теплоотдачи пластины в потоке вязкой жидкости при ламинарном пограничном слое, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(27), 1961.
57. Жюгжда И. И., Жукаускас А. А., Экспериментальное исследование теплообмена пластины при продольном обтекании в ламинарном пограничном слое, ИФЖ, 4, № 11, 1961. Johns Hopkins Univ. Appl. Lab. Transl. TG, 230-T-3, July 24, 1962.
58. Жюгжда И. И., Жукаускас А. А., Экспериментальное исследование локальной теплоотдачи неизотермической пластины при ламинарном пограничном слое, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(31), 1962.
59. Жюгжда И. И., Жукаускас А. А., Влияние необогреваемого участка на теплообмен пластины при ламинарном пограничном слое в потоке жидкостей, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(31), 1962.
60. Жукаускас А. А., Амбразявичюс А. Б., Жюгжда И. И., Влияние неизотермичности поверхности на теплообмен продольно обтекаемой пластины, ИФЖ, 7, № 4, 1964.
61. Жукаускас А. А., Эйдукиявичюс П. Ю., Жюгжда И. И., Расчет скоростных полей при обтекании пластины ламинарным потоком несжимаемой жидкости, Тепло и массоперенос, Изд-во „Энергия“, М., 1968.
62. Эйдукиявичюс П. Ю., Жукаускас А. А., Решение с помощью экспоненциальных рядов уравнений движения при обтекании пластины ламинарным потоком несжимаемой жидкости, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(47), 1965. Int. Chem. Engng, 7, No4, 1967.
63. Stephan K., Wärmeübergang und Druckabfall bei nicht ausgebildeter Laminarströmung in Rohren und in ebenen Spalten, Chemie-Ing.-Technik, Nr 12, 1959.
64. Stephan K., Beitrag zur Berechnung des Wärmeüberganges und Druckabfalles laminarer Einlaufströmungen, Ingenieur-Archiv, 29, Nr 3, 1960.
65. Sugawara S., Sato T., Heat transfer on the surface of parallel plates in the starting range, Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., 16, No 3, 1959.
66. Raesfeld A., Wärmeübergang und Druckabfall im Einlaufgebiet von luftdurchströmten Spalten, Chemie-Ing.-Technik, 25, Nr 5, 1953.
67. Sparrow E. M., Analysis of laminar forced convection heat transfer in entrance region of flat rectangular ducts, NACA TN 3331, 1955; Knudsen J. G., Katz D. L., Fluid dynamics and heat transfer, N. Y. — Toronto — London, 1958.
68. Schlichting H., Laminare Kanaleinlaufströmung, ZAMM, Nr 6, 1934, Теория пограничного слоя, Изд-во ИЛ, М., 1956.
69. Wang Y. L., Longwell P. A., Laminar flow in the inlet section of parallel plates, AIChE Journal, 10, No 3, 1964.
70. Жюгжда И. И., Жукаускас А. А., Экспериментальное исследование локальной теплоотдачи во входном участке между параллельными пластинами, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(32), 1963.
71. Жукаускас А. А., Жюгжда И. И., Экспериментальное исследование теплообмена и гидродинамического сопротивления во входном участке плоского канала при

- ламинарном течении вязкой жидкости, Тепло- и массоперенос, Изд-во „Наука и техника“, Минск, 1965.
72. Jansen L., Zum Wärmeübergang bei laminarer Strömung zwischen parallelen Platten, Schweiz, Bauzeitung, 70, September, 1952.
  73. Sellars J. R., Tribus M., Klein J. S., Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit — the Graetz problem extended, Trans. ASME, 78, No 2, 1956.
  74. Петухов Б. С., Расчет теплообмена и гидравлического сопротивления при ламинарном течении жидкости переменной вязкости в плоском канале, Теплоэнергетика, № 7, 1954.
  75. Петухов Б. С., Краснощеков Е. А., Исследование теплопередачи при вязкостном режиме течения жидкости в прямоугольных каналах и круглых трубах, Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
  76. Янг Ван-цзу, Конвективный теплообмен при вынужденном ламинарном течении жидкости в трубах в случае переменной вязкости, „Теплопередача“ (русский перевод, Trans. ASME, Ser. C, 84, No 4, 1962), № 4, 1962.
  77. Hausenblas H., Die nichtisotherme laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalten und Kapillarröhren, Ing. Archiv, XVIII, 3 Heft, 1950.
  78. Петухов Б. С., Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах, Изд-во „Энергия“, М., 1968.
  79. Лютикас Н. С., Жукаускас А. А., К вопросу определения теплообмена в случае ламинарного течения жидкости с переменной вязкостью в плоском канале, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(43), 1965.
  80. Лютикас Н. С., Жукаускас А. А., К вопросу определения теплообмена в случае ламинарного течения жидкости с переменной вязкостью в плоском канале, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 2(45), 1966. Int. Chem. Engng, 7, No 2, 1967.
  81. Лютикас Н. С., Жукаускас А. А., Исследование влияния переменной вязкости на ламинарный теплообмен плоского канала, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 2(49), 1967.
  82. Кеннеди Е. Д., Применение нового метода приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям Блазиуса, „Прикладная механика“ (русский перевод, Trans. ASME, ser. E, 31, No 1, 1964).
  83. Биркгоф Г., Гидродинамика, ИЛ, М., 1954.
  84. Померанцев А. А., Курс лекций по теории тепло- и массообмена, Изд-во „Высшая школа“, М., 1965.
  85. Чудов Л. А., О некоторых недостатках классической теории пограничного слоя, Численные методы в газовой динамике, Сб. работ вычислительного центра МГУ, 2, 1963.
  86. Carrier G. F., Lin C. C., On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate, Quart. Appl. Math., 6, 1948.
  87. Воскресенский К. Д., Турилина Е. С., Приближенная оценка нижней границы области применимости теории теплового пограничного слоя, сб. „Теплоотдача и гидродинамика“, Изд-во „Энергия“, М., 1968.
  88. Janour Z., NACA TM, 1316, 1951; Knudsen J. G., Katz D., Fluid dynamics and heat transfer, McGraw-Hill Com., 1958.
  89. Voley V. A., Friedman M. B., On the viscous flow around the leading edge of a flat plate, NASA, No 2, 1959.
  90. Eckert E. R., Die Berechnung des Wärmeübergangs in der laminaren Grenzschicht umströmten Körper, VDI-Forschungsheft 416, 1942.
  91. Швенчянас П. П., Макарявичюс В. И., Тамонис М. М., Жукаускас А. А., Влияние физических свойств жидкости на гидродинамику и теплообмен продольно обтекаемой пластины, Труды АН Литовской ССР, серия Б, 4(59), 1969.
  92. Poots G., Raggett G. F., Theoretical results for variable property, laminar boundary layer in water, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 10, No 5, 1967.
  93. Лейбензон Л. С., Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 1, Гидравлика, ГНТИ, 1931.

94. Lundgren T. S., Sparrow E. M., Starr J. B., The pressure drop due to entrance region in ducts of arbitrary cross section, *Trans. ASME, ser. D*, **86**, No 3, 1964 (русский перевод „Теоретические основы инженерных расчетов“ Изд-во „Мир“, № 3, 1964).
95. McComas S. T., Hydrodynamic entrance lengths for ducts of arbitrary section, *Trans. ASME, ser. D*, **89**, No 4, 1967 (русский перевод „Теоретические основы инженерных расчетов“, Изд-во „Мир“, № 4, 1967).
96. Siegel R., Sparrow E. M., Simultaneous development of velocity and temperature distributions in a flat duct with uniform wall heating, *AIChE Journal*, **5**, No, 1, 1959.
97. Hwang C. L., Fan L. T., Finite difference analysis of forced-convection heat transfer in entrance region of a flat rectangular duct, *Appl. Sci. Res. ser. A.*, **13**, No 6, 1964.
98. Leveque M. A., Transmission de chaleur par convection, *Annales des Mines, série 12, XIII*, 1928.
99. Bodnarescu M. V., Beitrag zur Theorie des Wärmeübergangs in laminarer Strömung, *VDI-Forschungsheft 450, ser. 19/27*, Düsseldorf, 1955.
100. Шнейдер П. И., Влияние теплопроводности жидкости на теплоотдачу во входном участке параллельных пластин и труб, „Вопросы ядерной энергетики“, № 2, 1958.
101. Шмушкевич И. М., Теплопередача в ламинарном потоке жидкости, протекающей в трубах малой длины, *ЖТФ, XVIII*, вып. 1, 1948.
102. Петухов Б. С., Краснощеков Е. А., Теплоотдача при вязкостном течении жидкости в трубах в условиях существенного изменения вязкости, Сб. „Теплопередача и тепловое моделирование“, Изд-во АН СССР, М., 1959.
103. Петухов Б. С., Краснощеков Е. А., Нольде Л. Д., Теплообмен при вязкостном движении жидкости в трубах и каналах, *Теплоэнергетика*, № 12, 1956.
104. Петухов Б. С., Опытное изучение процессов теплопередачи, ГЭИ, М.—Л., 1952.
105. Осипова В. А., Экспериментальное исследование процессов теплообмена, Изд-во „Энергия“, 1964.
106. Преображенский В. П., Теплотехнические измерения и приборы, Госэнергоиздат, М.—Л., 1953.
107. Матюкас А. А., Жюгжда И. И., Макарявичюс В. И., Жукаускас А. А., Применение полупроводниковых термосопротивлений для измерения скорости потока вязкой жидкости, Труды АН Литовской ССР, серия Б, **3(34)**, 1963.
108. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С., Теплопередача, Изд-во „Энергия“, М.—Л., 1965.
109. Босворт Р. Ч., Процессы теплового переноса, ГИТТЛ, М., 1957.
110. Van der Hegge Zijnen B. G., Modified correlation formulas for the transfer by natural and by from horizontal cylinders, *Appl. Sci. Res., ser. A*, **6**, No 2—3, 1956.
111. Sparrow E. M., Minkowycz W. J., Buoyancy effect on horizontal boundary layers flow and heat transfer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, **5**, No 5, 1962.
112. Mori Y., Buoyancy effects in forced laminar convection flow over a horizontal flat plate, *Trans. ASME, ser. C*, **83**, No 4, 1961.
113. Lowe G., An approximate solution of the laminar heat transfer along a heated flat plate with an arbitrary distribution surface temperature, *J. Aeronaut. Sci.*, **24**, No 12, 1957.
114. Ока С., Расчет температурного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине с заданной переменной температурой поверхности, Тепло и массоперенос, **9**, Минск, Изд-во „Наука и техника“, 1968.

115. Baxter D. S., Reynolds W. C., Fundamental solutions for heat transfer for nonisothermal flat plates, *J.*, **25**, No 6, 1958.
116. Sieder E. N., Tate G. E., Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, *Ind. Eng. Chem.*, **28**, No 12, 1936.
117. Kraussold H., *Der Wärmeübergang bei zähen Flüssigkeiten in Rohren*, Forschungsheft 351, 1931.
118. Магомедов А. Д., Исследование теплообмена и гидравлического сопротивления при движении вязкой и упруго-вязко-пластической жидкости в трубах, Кандидатская диссертация, ЭНИН, 1954.
119. Филмонов С. С., Хрусталеv Б. А., Исследование теплообмена и гидравлического сопротивления при движении воды в трубах, Сб. „Конвективный и лучистый теплообмен“, Изд-во АН СССР, 1960.
120. Эльперин И. Т., Каунасский симпозиум по конвективному теплообмену в потоке несжимаемой жидкости, *ИФЖ*, **5**, № 10, 1962.

# Reziumė

Šis leidinys yra antroji knyga, kurioje apibendrinami Lietuvos TSR Mokslų akademijos Fizikinių-techninių energetikos problemų institute vykdomi tyrimai šiluminės fizikos srityje.

Daug metų institute nagrinėjami konvekcinių šilumos mainų klausimai, glaudžiai susiję su naujų energetikos sričių išsivystymu ir įvairių šilumos mainų aparatų kūrimu. Tyrimų metu teko spręsti daugelį klausimų, liečiančių šilumos mainus, kai klampus skystis laminariškai apteka tiriamojo kūno paviršių. Visa institute išnagrinėta laminarinių šilumos mainų medžiaga vieningos metodikos pagrindu susisteminta ir pateikta šioje knygoje.

Knygos pradžioje pateikiama trumpa literatūros nagrinėjama klausimais apžvalga.

Antrajame jos skyriuje pateikti įvairūs judėjimo lygčių sprendimai tuo atveju, kai plokštė apteka klampus nesuspaudžiamas skystis. Nuodugniau nagrinėjamas judėjimo lygčių sprendimas, kurį, taikydamas eksponentines eilutes, gavo instituto mokslinis bendradarbis P. Eidukevičius.

Trečiasis skyrius apima šilumos mainų laminariniame plokštės pasienio sluoksnyje atskirų uždavinių analitinius sprendimus, pagrindinį dėmesį skiriant poveikiui, kurį skysčių fizikinės savybės ir paviršiaus neizotermiškumas daro plokštės šilumos atidavimui.

Ketvirtajame ir penktajame skyriuose pateiktas šilumos mainų ir hidraulinio jo pasipriešinimo plokščiam kanale – tiek pradiniam hidrodinaminės stabilizacijos ruože, tiek ir nusistovėjusiam laminarinio tekėjimo ruože – teorinis sprendimas. Nusistovėjusio tekėjimo sąlygomis šiuos klausimus ištyrė instituto bendradarbis N. Liutikas. Pagrindinis dėmesys šiuose tyrimuose buvo skiriamas nustatyti, kokį poveikį šilumos mainams daro klampumo kitimas, kurį sukelia temperatūros kitimas. Šilumos mainai buvo nagrinėjami įvairiomis ribinėmis sąlygomis ant sienelės. Temperatūros pasiskirstymui aprašyti parinktas ketvirtjo laipsnio polinomas. Palyginimui pateikti antrojo ir trečiojo laipsnio polinomi. Gauti analitiniai sprendiniai šilumos mainams ir hidrauliniam pasipriešinimui terminės stabilizacijos ruože ir termiškai stabilizuotame sraute apskaičiuoti skysčio neizoterminio tekėjimo atvejais.

Šeštajame skyriuje pateikta eksperimentinių tyrimų metodika.

Septintajame skyriuje pateikiami autorių atliktų plokštės šilumos atidavimo laminariniame pasienio sluoksnyje klampių skysčių sraute eksperimentinių tyrimų rezultatai. Eksperimentai apima  $Pr_f$  intervalą nuo 0,7 iki 600 ir  $Re_f$  – nuo 3 iki  $1 \cdot 10^6$ . Smulkiau analizuojami eksperimentiniai neizoterminės plokštės šilumos atidavimo rezultatai ir jos paviršiaus temperatūros kitemo poveikis plokštės šilumos atidavimo intensyvumui. Žymi šio skyriaus dalis skirta nešildomo pradinio ruožo poveikio plokštės šilumos atidavimui skysčių sraute eksperimentiniams tyrimams nagrinėti. Nustatyta, kad ši poveikį įvertina parametras  $x_f/x$  su laipsnio rodikliu 0,2. Eksperimentinių duomenų analizė parodė, kad skysčių fizikinių savybių poveikį plokštės šilumos atidavimui įvertina kriterijus  $Pr_f$  su laipsnio rodikliu  $n=0,33$ , greičio poveikį šilumos atidavimui – kriterijus  $Re_f$  su laipsnio rodikliu 0,5.

Aštuntajame skyriuje išdėstyti plokščio kanalo šilumos mainų ir hidraulinio pasipriešinimo tyrimų rezultatai, išnagrinėta kintamų ir fizikinių savybių, kanalo geometrijos ir ribinių sąlygų poveikis šilumos mainams ir pasipriešinimui. Vietinis ir vidutinis šilumos atidavimas pradiniam kanalo ruože tarp lygiagrečių plokščių iširtas pastovaus šilumos srauto ant paviršiaus sąlygomis keturių nuotolių tarp plokščių atvejais. Eksperimentai oro, vandens ir transformatorinės alyvos srautuose parodė, kad srauto greičio tarp lygiagrečių plokščių padidėjimas sukelia pasienio sluoksnių suplonėjimą ir lygiagrečių plokščių šilumos atidavimo padidėjimą. Lyginant su vienišos plokštės šilumos atidavimu. Tyrimai atlikti transformatorinės alyvos, vandens ir oro srautuose nusistovėjusio tekėjimo sąlygomis, kai kanalo aukščiai yra įvairūs. Jie iš esmės patvirtino analitinių skaičiavimų, pateiktų penktajame skyriuje, rezultatus.

Paskutiniame, devintajame, skyriuje pateikamos bendros išvados ir praktinės rekomendacijos plokštės ir plokščio kanalo šilumos mainams ir pasipriešinimui klampaus skysčio laminarinio tekėjimo sąlygomis skaičiuoti.

Prieduose pateikta dalis gautų eksperimentinių duomenų. Lentelėse pateikti ir būdingiausi teorinių skaičiavimų rezultatai.



# Summary

This publication is the second book dealing with investigations in the field of thermophysics performed at the Institute of Physical and Technical Problems of Energetics of the Academy of Sciences of the Lithuanian SSR.

At the Institute problems of convective heat transfer have been investigated widely for a number of years in connection with the new branches of energetics and the creation of various heat transfer apparatus. Various problems of heat transfer in the case of laminar flow of viscous liquids on surfaces have been considered. All the results obtained on laminar heat transfer are collected and summarized on the basis of unified methodics and presented here.

Chapter 1 is a survey of literature concerning the problem.

Chapter 2 presents analytical solutions of laminar incompressible flow of viscous liquids on a flat plate. The solution of the equations of motion in the case of laminar flow of incompressible liquid on a flat plate, performed by P. Eidukevičius by means of exponential series, is discussed in detail.

Chapter 3 gives analytical solutions of heat transfer from a flat plate in the case of laminar boundary layer. Special consideration is given to the influence of variation of the physical properties of liquids and surface non-isothermity of heat transfer.

Chapters 4 and 5 give theoretical solutions of heat transfer and fluid friction in a flat channel, both at its entrance hydrodynamic region and in the steady laminar flow region. Results of investigations on steady laminar flow were obtained by N. Liutikas. The data are concerned with the influence of viscosity variation with temperature on heat transfer. Heat transfer is discussed under various boundary conditions at the wall. A 4th power polynomial is chosen for temperature distribution. Comparative analysis of results obtained with 2nd and 3rd power polynomials is also given. Analytical equations are obtained for heat transfer and fluid friction calculations both for the entrance thermal region and for the thermally stable flow region.

Chapter 6 deals with experimental methodics.

Chapter 7 describes the authors experiments on heat transfer from a flat plate in the flow of viscous liquids at laminar boundary layer. Experiments cover the range of  $Pr_f$  from 0.7 to 600 and that of  $Re_f$  from 3 to  $1 \cdot 10^5$ . Experimental data of heat transfer from non-isothermic plate and the influence of temperature variation on heat transfer intensity are analysed in detail. A considerable part of this chapter is devoted to experimental investigations of the influence of unheated entrance region on heat transfer from plate to liquid flow.

It appears that parameter  $x_1/x_2$  to the 0.2 power determines the value of this influence.

Analysis of experimental investigations showed the influence of the physical properties of fluids being evaluated by number  $Pr_f$  to the 0.33 power, whereas the influence of flow velocity, by number  $Re_f$  to the 0.5 power.

Chapter 8 deals with experiments on heat exchange and liquid friction in a flat channel. The influence of variable physical properties, channel geometry and boundary conditions on heat exchange and resistance is elucidated.

Local and mean heat transfer in the entrance region between parallel plates at constant heat flux and for 4 different distances between the plates was investigated. Experiments in the flow of air, water and transformer oil show that with increasing velocity between parallel plates the boundary layer thickness decreases and heat transfer from the plates increases, as compared to heat transfer from a single plate.

Experiment with the steady flow of air, water and transformer oil were performed at different channel height. They confirm the results of analytical calculations presented in Chapter 5.

In the final Chapter general conclusions and practical recommendations for heat transfer and surface friction calculations in the laminar flow of viscous liquids are given.

In the appendix a part of experimental results together with tables of characteristic results of theoretical calculations is presented.



# Contents

Preface .....	5
List of basic symbols .....	7
Chapter 1. INTRODUCTION .....	11
Chapter 2. THEORETICAL CALCULATION OF FLOW OF VISCOUS LIQUIDS ON FLAT PLATE .....	20
2.1. Equations of motion for boundary layer flow .....	20
2.2. Calculation of hydrodynamical boundary layer on flat plate ....	21
2.3. Solution of boundary layer equations at given distribution of velocity $U_0=cx^{m_1}$ on outer edge of boundary layer .....	28
2.4. Determination of velocity fields on plate at constant mass rate of fluid .....	31
2.5. Flow on plate at small $Re$ number .....	36
2.6. Comparison of results of flow on flat plate .....	37
Chapter 3. THEORETICAL CALCULATION OF HEAT TRANSFER ON FLAT PLATE .....	39
3.1. Equations of heat flux .....	39
3.2. Heat transfer of isothermal surface .....	40
3.3. Heat transfer from surface at given distribution of velocity $U_0=cx^{m_1}$ on outer edge of boundary layer .....	45
3.4. Influence of non-heated entrance region on heat transfer of flat plate .....	47
3.5. Heat transfer of non-isothermal surface .....	50
3.6. Influence of variable physical properties of fluid on heat transfer of plate .....	65
3.7. Velocity and temperature fields on flat plate at variable physical properties of fluids .....	76
Chapter 4. THEORETICAL CALCULATION OF HEAT TRANSFER IN EN- TRANCE REGION BETWEEN PARALLEL PLATES .....	83
4.1. Flow of liquids in entrance region between parallel plates .....	84
4.2. Heat transfer in entrance region between parallel plates at $T_w=\text{const}$ .....	93
4.3. Heat transfer in entrance region between parallel plates at $q_w=\text{const}$ .....	93
Chapter 5. THEORETICAL CALCULATION OF HEAT TRANSFER FOR STEADY FLOW IN FLAT CHANNEL .....	100
5.1. General remarks .....	100
5.2. Heat transfer for steady flow in flat channel at $T_w=\text{const}$ ....	103
5.3. Heat transfer for steady flow in flat channel at $q_w=\text{const}$ ....	121
5.4. Analysis of results of theoretical calculation .....	130
Chapter 6. METHOD OF EXPERIMENTAL INVESTIGATION .....	144
6.1. Experimental equipment .....	145
6.2. Determination of heat transfer .....	149
6.3. Determination of hydrodynamic characteristics .....	155
6.4. Characteristics of test performance .....	157
Chapter 7. EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF HEAT TRANSFER OF PLATE .....	158
7.1. Influence of physical properties and temperature difference on heat transfer of plate .....	159
7.2. Local heat transfer of isothermal plate .....	164
7.3. Local heat transfer of non-isothermal plate .....	164
7.4. Influence of initial non-heating region on heat transfer of plate .....	170

		259
	7.5. Mean heat transfer of isothermal plate .....	174
	7.7. Comparison of results obtained .....	179
<b>Chapter 8.</b>	<b>EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF HEAT TRANSFER IN FLAT CHANNEL</b> .....	183
	8.1. Local heat transfer in entrance region of channel between parallel plates .....	183
	8.2. Mean heat transfer in entrance region of channel between parallel plates .....	187
	8.3. Fluid friction in entrance region of flat channel .....	189
	8.4. Local heat transfer for hydrodynamically steady flow in flat channel .....	190
	8.5. Mean heat transfer for steady flow in flat channel .....	194
	8.6. Fluid friction for steady flow in flat channel .....	195
	8.7. Comparison of results obtained .....	197
<b>Chapter 9.</b>	<b>CONCLUSION AND PRACTICAL PROPOSALS</b> .....	201
	9.1. Concluding remarks .....	201
	9.2. Recommendations for determination of hydrodynamical characteristics .....	204
	9.3. Recommendations for calculation of heat transfer .....	206
<b>APPENDIX</b>		
	1. Results of theoretical calculations .....	213
	2. Physical properties of fluids .....	217
	3. Experimental results of local heat transfer of plate in flow of transformer oil, water and air .....	218
	4. Experimental results of mean heat transfer of plate in flow of transformer oil, water and air .....	232
	5. Experimental results of local heat transfer in entrance region of flat channel .....	235
	6. Experimental results of mean heat transfer in entrance region of flat channel .....	242
	7. Experimental results of local heat transfer for steady flow of fluids in flat channel .....	243
	8. Experimental results of mean heat transfer for steady flow of fluids in flat channel .....	245
	9. Experimental results of flow friction for flow of fluids in flat channel .....	246
<b>References</b> .....		249
<b>Summary in Lithuanian</b> .....		255
<b>Summary in English</b> .....		257
<b>Contents in Russian</b> .....		260

# Содержание

Предисловие .....	5
Перечень основных обозначений .....	7
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ .....	11
Глава 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ .....	20
2.1. Уравнения движения жидкости в пограничном слое .....	20
2.2. Расчет динамического пограничного слоя на пластине .....	21
2.3. Решение уравнений пограничного слоя при заданном распределении скорости $U_0 = cx^m$ на внешней границе .....	28
2.4. Определение скоростных полей на пластине при постоянном расходе жидкости .....	31
2.5. Обтекание пластины при малых числах $Re$ .....	36
2.6. Сопоставление результатов обтекания пластины .....	37
Глава 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОТДАЧИ ПЛАСТИНЫ .....	39
3.1. Уравнения теплового потока .....	39
3.2. Теплоотдача изотермической поверхности .....	40
3.3. Теплоотдача поверхности при заданном распределении скорости $U = cx^m$ на внешней границе пограничного слоя .....	45
3.4. Влияние необогреваемого начального участка на теплоотдачу пластины .....	47
3.5. Теплоотдача неизотермической поверхности .....	50
3.6. Влияние зависимости физических свойств жидкости от температуры на теплоотдачу пластины .....	65
3.7. Скоростные и температурные поля на пластине при переменных физических свойствах жидкости .....	76
Глава 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОТДАЧИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛАСТИН .....	83
4.1. Движение жидкости в начальном участке параллельных пластин .....	84
4.2. Теплоотдача начального участка параллельных пластин при $T_w = \text{const}$ .....	93
4.3. Теплоотдача начального участка параллельных пластин при $q_w = \text{const}$ .....	97
Глава 5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ .....	100
5.1. Общие замечания .....	100
5.2. Теплообмен при установившемся течении в плоском канале при $T_w = \text{const}$ .....	103
5.3. Теплообмен при установившемся течении в плоском канале при $q = \text{const}$ .....	121
5.4. Анализ результатов теоретического расчета .....	130
Глава 6. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ .....	144
6.1. Экспериментальная установка .....	145
6.2. Определение теплоотдачи .....	149
6.3. Определение гидродинамических характеристик .....	155
6.4. Особенности проведения опытов .....	157

<b>Глава 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОТДАЧИ ПЛАСТИНЫ</b> .....	158
7.1. Влияние физических свойств жидкости и температурного напора на теплоотдачу пластины .....	159
7.2. Местная теплоотдача изотермической пластины .....	164
7.3. Местная теплоотдача неизотермической пластины .....	164
7.4. Влияние начального необогреваемого участка на теплоотдачу пластины .....	170
7.5. Средняя теплоотдача изотермической пластины .....	174
7.6. Средняя теплоотдача неизотермической пластины .....	174
7.7. Сопоставление полученных результатов .....	179
<b>Глава 8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ</b> .....	183
8.1. Местная теплоотдача начального участка параллельных пластин .....	183
8.2. Средняя теплоотдача начального участка параллельных пластин .....	187
8.3. Гидравлическое сопротивление начального участка плоского канала .....	189
8.4. Местная теплоотдача при гидродинамически установившемся течении в плоском канале .....	190
8.5. Средняя теплоотдача при установившемся течении в плоском канале .....	194
8.6. Гидравлическое сопротивление при установившемся течении в плоском канале .....	195
8.7. Сопоставление полученных результатов .....	197
<b>Глава 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ</b> .....	201
9.1. Заключительные замечания .....	201
9.2. Рекомендации по определению гидродинамических характеристик .....	204
9.3. Рекомендации по расчету теплоотдачи .....	206
<b>Приложения</b>	
1. Данные теоретических расчетов .....	213
2. Теплофизические свойства жидкостей .....	217
3. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче пластины в потоках трансформаторного масла, воды и воздуха .....	218
4. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче пластины в потоках трансформаторного масла, воды и воздуха .....	232
5. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче в начальном участке параллельных пластин .....	235
6. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче в начальном участке параллельных пластин .....	242
7. Экспериментальные данные по местной теплоотдаче плоского канала при установившемся течении жидкости .....	243
8. Экспериментальные данные по средней теплоотдаче плоского канала при установившемся течении жидкости .....	245
9. Экспериментальные данные по гидравлическому сопротивлению плоского канала .....	246
<b>Литература</b> .....	249
<b>Резюме на литовском языке</b> .....	255
<b>Резюме на английском языке</b> .....	257
<b>Содержание на английском языке</b> .....	258

Редактор Д. Мелинене  
Художник А. Гедминас  
Тех. редактор В. Макарявичюс  
Корректор А. Шулгайте

Издание № 10919. Тираж 2500 экз.  
Подписано к печати 14.X.1969 г. ЛВ 12483.  
Бумага 70×90<sup>1/16</sup>=8,25 л. б., 19 п. л. 17,75 уч.-изд. л.

Цена 2 руб.

Отпечатано в гос. типографии им. К. Пожель г. Каунас,  
Гедимино 10. Заказ № 823.

УДК 536.24

Теплоотдача в ламинарном потоке жидкости. Жукаускас А., Жюгжда И. Издательство „Минтис“, Вильнюс, 1969 г., стр. 266.

В монографии, предназначенной для научных работников и инженеров проектно-конструкторских учреждений, работающих в области теплоэнергетики и химической промышленности, представляются обобщенные результаты теоретических и экспериментальных исследований теплоотдачи пластины и плоского канала в ламинарном потоке жидкости. Анализируемый обширный экспериментальный материал охватывает исследования, выполненные в Институте физико-технических проблем энергетики Академии наук Литовской ССР, с различными пластинами и каналами в интервале значений  $Pr$  от 0,7 до 600.

Подробно рассматривается влияние на теплоотдачу рода жидкости, температурного напора, направления теплого потока, неизотермичности поверхности и других факторов.

Весь материал систематизирован на основе единой методики, получен ряд закономерностей происходящего процесса. Для практики рекомендуются составленные графики и формулы обобщенного вида, которые могут быть широко использованы при расчете теплообменных аппаратов.

Таблиц 59, рисунков 99, библиографий 120.